線形作用素への誘い

行列からヒルベルト空間上の
有界線形作用素へ

古田孝之 著

培風館

貞 子 へ

序　　文

本書の主目的は，行列の理論のみを用いて，ヒルベルト空間上の線形作用素に関する最新の興味深い結果を紹介することである．よく知られているように，線形作用素論は行列の理論の自然な拡張である．線形作用素論に関する本は数多く存在するが，いずれも数学に関する十分な知識を要求する，いわば

作用素論の専門家によって書かれた専門家のための本

である．

私は，学生に，また**数学に関する十分な知識はもっていないが線形作用素論に十分な興味をもっている人たち**に容易に理解できるような，線形作用素論を紹介した本を書こうと考えていた．

この題目の構想を実現しているような本は，私の知る限りでは現在一冊も存在しない．主目的は，行列の理論しか習得していない非専門家の人たちの役に立つような本を出版することである．

読者は，必要な事柄をすべて完備している本書を読んだ後で，専門家向きに書かれたより高度な線形作用素に関する本に挑戦しようとするならば，これこそまさに私が本書を執筆した意図である．このようなことから，現代数学の研究では英文で書かれた論文を基にしてなされていることが多いので，読者に慣れ親しんでもらうために専門用語はできるだけ英文を主にしてその日本語訳は従として引用している．

率直にいって，本書は線形作用素論のすべての分野を扱ってはいないが，線形作用素に関するもっとも基本的で重要な結果を，行列の理論を基礎として紹介している．

以下，各章の内容を簡単に要約していこう．

第１章では，ヒルベルト空間のもっとも必要な性質を述べる．

第2章では，ヒルベルト空間上の線形作用素のもっとも基本的な性質を列挙する．

第3章では，いくつかの国際学会において，また，数多くの作用素論の本や数学の雑誌に紹介された，線形作用素に関する興味深い話題について解説する．

なお，各節の最後にある**メモ・注釈・参考文献**では，扱った範囲にある，興味深い，注目すべき最新の結果を紹介する．

2000年12月

東京にて

古田 孝之

謝 辞

著者を“数学”に導いて下さった武田二郎教授に心から感謝の念を表します．

いつも有意義な御助言をいただいている中村正弘教授に心から感謝致します．

また，いつも暖かい御激励をいただいた梅垣壽春教授に厚くお礼申し上げます．

有用な助言をいただいた Chia-Shiang Lin 教授に厚くお礼申し上げます．

本書の原稿作成にあたり，柳田昌宏，山崎丈明，伊藤公智の三氏に大変お世話になりました．ここに厚くお礼申し上げます．さらに，柳田氏には図の作成に多大なご尽力をいただき，ここに深く感謝致します．

本書の執筆を熱心に勧めて下さった培風館の木村博信氏と，きめ細かい校正と有意義なご注意をいただいた岩田誠司氏に心から謝意を述べたいと思います．

目　次

1

ヒルベルト空間

§1.1　内積空間とヒルベルト空間

Definition 1. X を複素数 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．任意のベクトル $x, y \in X$ に対して，次の (I1), (I2), (I3), (I4) を満たす複素数 $(x, y) \in \mathbb{C}$ が存在するとき，(x, y) を x と y の **inner product** (内積) という．

(I1) $(x, x) \geq 0$, そして $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(I2) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ がすべての $x, y \in X$ で成り立つ．

(I3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ がすべての $x, y, z \in X$ で成り立つ．

(I4) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ がすべての複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ で成り立つ．

複素ベクトル空間 X が内積をもつとき，X を **inner product space** (内積空間) もしくは **pre-Hilbert space** (プレ–ヒルベルト空間) という．

Definition 2. X を複素数 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．任意のベクトル $x \in X$ に対して，次の (N1), (N2), (N3) を満たす実数 $\|x\| \in \mathbb{R}$ が存在するとき，$\|x\|$ を x の **norm** (ノルム) という．

(N1) $\|x\| \geq 0$, そして $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(**strictly positive** (正値性))

(N2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ がすべての $x, y \in X$ で成り立つ．

(**triangle inequality** (三角不等式))

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ がすべての複素数 λ で成り立つ.

(**strictly homogeneous** (斉次性))

ノルムをもつような複素ベクトル空間 X を **normed space** (ノルム空間) という. そして $d(x,y) = \|x - y\|$ とおくことによって, ノルムの条件 (N1), (N2), (N3) から $d(x,y)$ は距離になることが簡単にわかる. このことから, ノルム空間は距離空間である.

Theorem 1 (parallelogram law (中線定理)). 内積空間 X において,

(1)
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

がすべての $x, y \in X$ で成り立つ. ここで $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ とする.

Proof. (I1), (I2), (I3), (I4) によって

(2)
$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2$$

が成り立つ. ここで y を $-y$ に置き換えると

(3)
$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2$$

となるから, (2), (3) によって, 目的の式 (1) を得る. □

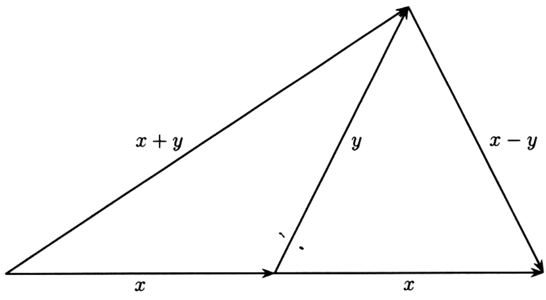


Figure 1 §1.1 の Theorem 1 に関するメモ.

内積空間において, x のノルム $\|x\|$ は内積を用いて $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ と定義されている. 逆に, 内積 (x,y) はノルムを用いて次のように表すことができる.

Theorem 2 (polarization identity (極化等式)). 内積空間 X において,

$$(4)\qquad (x,y)=\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2\}$$

がすべての $x,y\in X$ で成り立つ.

Proof. (2) において y を iy に, また y を $-iy$ に置き換えることによって, 次の 2 つの式を得る.

$$(5)\qquad \|x+iy\|^2=(x+iy,x+iy)=\|x\|^2-i(x,y)+i(y,x)+\|y\|^2,$$

$$(6)\qquad \|x-iy\|^2=(x-iy,x-iy)=\|x\|^2+i(x,y)-i(y,x)+\|y\|^2.$$

よって, (2), (3), (5), (6) から (4) を得る. □

Theorem C-S (Cauchy-Schwarz (コーシー – シュワルツ) の不等式). 内積空間 X において,

$$(7)\qquad |(x,y)|\le\|x\|\,\|y\|$$

が任意の $x,y\in X$ で成り立つ. また, 等号は x と y が線形従属のときに限る.

Cauchy–Schwarz の不等式は, 数学の中でもっとも基本的で重要な不等式である. そして, しばしば **Schwarz(シュワルツ) の不等式**とよばれることもある.

Proof of Theorem C-S. $y=0$ の場合は, $(x,y)=0$ であることから, (7) は明らかに成り立つ. よって $y\neq 0$ の場合のみを示せばよい. 任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して,

$$(8)\qquad 0\le\|x+\lambda y\|^2=\|x\|^2+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+|\lambda|^2\,\|y\|^2.$$

ここで, (8) において $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{\|y\|^2}$ とおくと,

$$(9)\qquad \begin{aligned}0&\le\|x\|^2-\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2}-\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2}+\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2\\&=\|x\|^2-\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2}.\end{aligned}$$

よって, 目的の式 (7) を得る. また (7) の等号条件は, (8) と (9) より得られる. □

Remark 1. ここで，なぜ (8) において $\lambda = -\dfrac{(x,y)}{\|y\|^2}$ とおくのかを説明しよう．

内積空間 X において，関数 $F(\lambda, x, y) = \|x + \lambda y\|^2$ を考えてみる．ここで $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$, $(x,y) = |(x,y)| e^{i\theta}$ とすると，

(10) $$F(\lambda, x, y) = \|x + \lambda y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + |\lambda|^2 \|y\|^2$$

$$= \|y\|^2 \left(|\lambda| + \frac{\mathrm{Re}\big(|(x,y)| e^{i(\varphi-\theta)}\big)}{\|y\|^2} \right)^2 + \|x\|^2 - \frac{\mathrm{Re}\big(|(x,y)|^2 e^{i2(\varphi-\theta)}\big)}{\|y\|^2}$$

$$\geq \|x\|^2 - \frac{\mathrm{Re}\big(|(x,y)|^2 e^{i2(\varphi-\theta)}\big)}{\|y\|^2}.$$

そして，(10) において $\varphi = \theta + \pi$, $|\lambda| = \dfrac{|(x,y)|}{\|y\|^2}$ とすると，

$$\lambda = |\lambda| e^{i(\theta+\pi)} = -\frac{(x,y)}{\|y\|^2}$$

となることより，(10) から (9) を得る．ここで，$f(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$ は $\lambda = -\dfrac{(x,y)}{\|y\|^2}$ で最小値をとる．

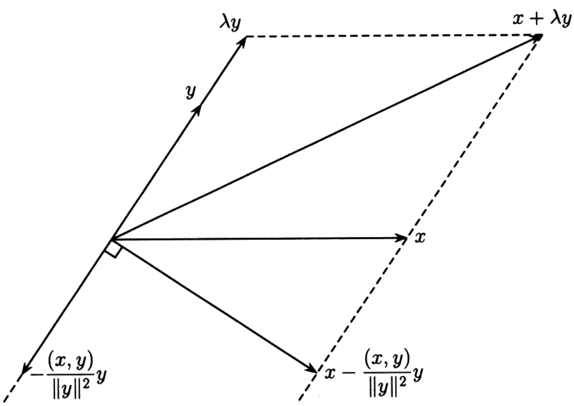


Figure 2　§ 1.1 の Theorem C-S に関するメモ．

Theorem 3. 内積空間はノルム空間である．

Proof. ノルム $\|x\|$ を $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ と定義する．すると，(I1) より (N1), また，

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x,x) = |\lambda|^2\|x\|^2$$

より (N3) を満たす．さらに，(N2) は次のように示せばよい．

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x,y) + (y,x) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \qquad \text{(Theorem C-S より)} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

Definition 3. ノルム空間 X のベクトル列 $\{x_n\}$ が x に **strongly convergent** (強収束) するとは，$n \to \infty$ のとき，$\|x_n - x\| \to 0$ が成り立つことをいい，$x_n \to x$ (s) と表す．

ノルム空間 X のベクトル列 $\{x_n\}$ が **Cauchy** (コーシー) **列**であるとは，$m \to \infty, n \to \infty$ のとき，$\|x_m - x_n\| \to 0$ が成り立つことをいう．

ノルム空間 X において，すべての Cauchy 列が X に極限をもつとき，すなわち $m \to \infty$, $n \to \infty$ のとき，$\|x_m - x_n\| \to 0$ となるならば，$\|x_n - x_0\| \to 0$ となるような $x_0 \in X$ が存在するときに，X は **complete** (完備) であるという．

内積空間 X のベクトル列 $\{x_n\}$ が x に **weakly convergent** (弱収束) するとは，$n \to \infty$ のとき，$(x_n, y) - (x, y) \to 0$ が任意の $y \in X$ で成り立つことをいい，$x_n \to x$ (w) と表す．

Schwarz の不等式を用いることによって，“$x_n \to x$ (s) $\Longrightarrow$ $x_n \to x$ (w)” であることに注意する．また，strongly convergent, weakly convergent の極限はともに一意に定まる．

Definition 4. 完備な内積空間のことを **Hilbert space** (ヒルベルト空間) という．

Definition 5. 完備なノルム空間のことを **Banach space** (バナッハ空間) という．

§1.2 Jordan-Neumann の定理

Theorem J-N (Jordan-Neumann(ジョルダン–ノイマン) の定理).

(i) 実数 $\mathbb{R}$ 上のノルム空間 X が任意の $x, y \in X$ に対して次の式を満たすとする.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

このとき, X は $\mathbb{R}$ 上の内積空間になる. 逆に, $\mathbb{R}$ 上の内積空間 X は (1) を満たす.

(ii) 複素数 $\mathbb{C}$ 上のノルム空間 X が任意の $x, y \in X$ に対して (1) を満たすとする. このとき, X は $\mathbb{C}$ 上の内積空間になる. 逆に, $\mathbb{C}$ 上の内積空間 X は (1) を満たす.

Proof. (i) $\mathbb{R}$ 上のノルム空間 X が (1) を満たすと仮定する. そして, $(x, y)_{\mathbb{R}}$ を次のように定義する.

$$(x, y)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{2}$$

すると (1), (2) より次の式を得る.

$$\begin{aligned}(x, z)_{\mathbb{R}} + (y, z)_{\mathbb{R}} &= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|^2\right) \qquad ((1) \text{ より}) \\ &= 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right)_{\mathbb{R}} \qquad ((2) \text{ より}).\end{aligned} \tag{3}$$

ここで, (3) において $y = 0$ とおくと,

$$(x, z)_{\mathbb{R}} + (0, z)_{\mathbb{R}} = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)_{\mathbb{R}}.$$

よって, (2) より $(0, z)_{\mathbb{R}} = 0$ であるから

$$(x, z)_{\mathbb{R}} = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)_{\mathbb{R}}. \tag{4}$$

ここで, (4) は任意のベクトル $x, z \in X$ で成り立つことにより, (3) の右辺は

$$2\left(\frac{x+y}{2}, z\right)_{\mathbb{R}} = (x+y, z)_{\mathbb{R}}$$

となる. よって, (3) により

$$(x+y, z)_{\mathbb{R}} = (x, z)_{\mathbb{R}} + (y, z)_{\mathbb{R}}. \tag{5}$$

一方，次の式は (2) より明らかに成り立つ.

(6) $$(x,y)_{\mathbb{R}} = (y,x)_{\mathbb{R}},$$

(7) $$(x,x)_{\mathbb{R}} = \|x\|^2.$$

よって，次の (8) のみを示せばよい.

(8) $(\alpha x,y)_{\mathbb{R}} = \alpha(x,y)_{\mathbb{R}}$ が任意の実数 α で成り立つ.

実際には，(8) は (5) によって α が自然数の場合は帰納的に示すことができ，(2) から，

$$(-x,y)_{\mathbb{R}} = -(x,y)_{\mathbb{R}}$$

も成り立つことが簡単にわかる．よって，

(9) $\left(\frac{n}{m}x,y\right)_{\mathbb{R}} = \frac{n}{m}(x,y)_{\mathbb{R}}$ が任意の整数 m, n で成り立つ.

任意の実数 α の場合は，$n\to\infty$ のときに $\alpha_n \to \alpha$ となるような有理数列 $\{\alpha_n\}$ が存在する．そして，$\alpha_n(x,y)_{\mathbb{R}} \to \alpha(x,y)_{\mathbb{R}}$ であることと，

$$\begin{aligned}\alpha_n(x,y)_{\mathbb{R}} &= (\alpha_n x,y)_{\mathbb{R}} \qquad ((9)\text{ より})\\ &= \frac{1}{4}(\|\alpha_n x+y\|^2 - \|\alpha_n x-y\|^2) \qquad ((2)\text{ より}),\end{aligned}$$

そして

$$\frac{1}{4}(\|\alpha_n x+y\|^2 - \|\alpha_n x-y\|^2) \ \to\ \frac{1}{4}(\|\alpha x+y\|^2 - \|\alpha x-y\|^2) = (\alpha x,y)_{\mathbb{R}}$$

がノルムの連続性と (2) によって成り立つことから (8) を得る．ゆえに (2) で定義された $(x,y)_{\mathbb{R}}$ は (5), (6), (7), (8) によって，内積であることがわかり，(1) を満たすノルム空間 X は内積空間であることが示せた.

逆に，X が実数 $\mathbb{R}$ 上の内積空間であれば，§1.1 の Theorem 1 の (1) の証明と同様に (1) を満たすことがわかる.

よって，(i) が証明できた.

(ii) (2) で定義された $(x,y)_{\mathbb{R}}$ を用いて (x,y) を

(10) $$(x,y) = (x,y)_{\mathbb{R}} + i(x,iy)_{\mathbb{R}}$$

のように定義し，そして (x,y) が内積であることを示すために，次の (11), (12), (13), (14) を示す.

(11) $(x,x) = \|x\|^2$，そして $(x,x)=0 \Longleftrightarrow x=0.$

(12) $(x+y,z) = (x,z)+(y,z).$

(13) $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$ が任意の複素数 α で成り立つ.

(14) $(y,x) = \overline{(x,y)}.$

(10) において $y=x$ とおく．すると，

$$
\begin{aligned}
(x,x) &= (x,x)_{\mathbb{R}} + i(x,ix)_{\mathbb{R}} \\
&= \frac{1}{4}(\|2x\|^2 - \|0\|^2) + \frac{1}{4}i(\|(1+i)x\|^2 - \|(1-i)x\|^2) \\
&= \|x\|^2
\end{aligned}
$$

であるから，$\|x\|$ がノルムであることより，(11) が成り立つ．

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+y,z) &= (x+y,z)_{\mathbb{R}} + i(x+y,iz)_{\mathbb{R}} && \text{((10) より)} \\
&= (x,z)_{\mathbb{R}} + (y,z)_{\mathbb{R}} + i(x,iz)_{\mathbb{R}} + i(y,iz)_{\mathbb{R}} && \text{((5) より)} \\
&= (x,z) + (y,z) && \text{((10) より)}
\end{aligned}
$$

であることにより，(12) が成り立つ．また，任意の実数 a に対して，

$$
\begin{aligned}
(ax,y) &= (ax,y)_{\mathbb{R}} + i(ax,iy)_{\mathbb{R}} && \text{((10) より)} \\
&= a(x,y)_{\mathbb{R}} + ia(x,iy)_{\mathbb{R}} && \text{((8) より)} \\
&= a(x,y) && \text{((10) より)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで $(x,y)_{\mathbb{R}}$ の定義により，

(15) $$(ix,iy)_{\mathbb{R}} = (x,y)_{\mathbb{R}}$$

がわかり，(15) と (10) を適用することによって，次を得る．

(16)
$$
\begin{aligned}
(ix,y) &= (ix,y)_{\mathbb{R}} + i(ix,iy)_{\mathbb{R}} && \text{((10) より)} \\
&= -(ix,iiy)_{\mathbb{R}} + i(ix,iy)_{\mathbb{R}} && \text{((6), (8) より)} \\
&= -(x,iy)_{\mathbb{R}} + i(x,y)_{\mathbb{R}} && \text{((15) より)} \\
&= i\{(x,y)_{\mathbb{R}} + i(x,iy)_{\mathbb{R}}\} \\
&= i(x,y) && \text{((10) より)}.
\end{aligned}
$$

したがって，任意の実数 a, b に対して，

$$
\begin{aligned}
((a+bi)x,y) &= (ax,y) + (ibx,y) && \text{((12) より)} \\
&= a(x,y) + b(ix,y) && \text{((8) より)} \\
&= a(x,y) + bi(x,y) && \text{((16) より)} \\
&= (a+bi)(x,y).
\end{aligned}
$$

よって (13) が得られた．

最後に (14) を次のように示す.

$$\begin{aligned}(y,x) &= (y,x)_{\mathbb{R}} + i(y,ix)_{\mathbb{R}} \\ &= (x,y)_{\mathbb{R}} + i(iy,iix)_{\mathbb{R}} \qquad ((6),\ (15)\ \text{より}) \\ &= (x,y)_{\mathbb{R}} - i(iy,x)_{\mathbb{R}} \qquad ((6),\ (8)\ \text{より}) \\ &= (x,y)_{\mathbb{R}} - i(x,iy)_{\mathbb{R}} \qquad ((6)\ \text{より}) \\ &= \overline{(x,y)} \qquad ((10)\ \text{より}).\end{aligned}$$

逆に, X が複素数 $\mathbb{C}$ 上の内積空間であった場合, (1) は §1.1 の Theorem 1 の (1) そのものである. よって (ii) が示された. □

Theorem 1. X を複素数 $\mathbb{C}$ 上のノルム空間とし, $C(x,y)$ を次のように定義する.

$$C(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2}\right).$$

そして a を $C(x,y)$ の最小値, b を $C(x,y)$ の最大値としたとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\frac{1}{2} \le a \le 1 \le b \le 2. \tag{17}$$

さらに, X が内積空間であることの必要十分条件は $a=b=1$ である.

Proof. 最初に, $0 \le a \le b$ と次の不等式が成り立つことに注意しておく.

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \le 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{18}$$

すると, 簡単な計算によって次の式を得る.

$$\begin{aligned}C(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2}\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left(\frac{2(\|x\| + \|y\|)^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2}\right) \qquad (\text{ノルムの三角不等式より}) \\ &\le 2\left(\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2}\right) \qquad ((18)\ \text{より}) \\ &= 2.\end{aligned}$$

よって $0 < b \le 2$ を得る.

次に，$C(x+y, x-y)$ を考えてみると，

$$C(x+y, x-y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\|2x\|^2 + \|2y\|^2}{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}\right) = \frac{1}{C(x,y)}.$$

このことと，$0 < b \leq 2$ により $a = \frac{1}{b}$, $a \geq \frac{1}{2}$ がわかる．よって $\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \leq b \leq 2$ が示された．

最後の必要十分条件は Theorem J-N そのものである．よって Theorem 1 が示された． □

Example 1. $C[0,1] = \{x : x(t)$ は $[0,1]$ 上の実数値連続関数 $\}$

$x \in C[0,1]$ に対して $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$ であることに注意する．そして，$C[0,1]$ の元として $x_1 = 1$, $x_2 = t$ を考えると，

$$\|x_1 + x_2\| = \|1 + t\| = 2,$$

$$\|x_1 - x_2\| = \|1 - t\| = 1.$$

よって，

$$\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 5.$$

一方，

$$2(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) = 4.$$

よって Theorem J-N の (1) を満たさないので，$C[0,1]$ は内積空間ではない． □

Example 2. $L^2[0,1] = \left\{x : x(t) \text{ は } \int_0^1 |x(t)|^2 dt < \infty \text{ であるような } [0,1] \text{ 上の複素数値関数}\right\}$

$x \in L^2[0,1]$ に対して $\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ であることに注意する．すると，

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \int_0^1 |x(t)+y(t)|^2 dt + \int_0^1 |x(t)-y(t)|^2 dt \\ &= 2\left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt + \int_0^1 |y(t)|^2 dt\right) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

よって $L^2[0,1]$ は Theorem J-N の (1) を満たすので，内積空間になる． □

Remark 1. l^p 空間におけるノルム $\|x\|_p$ は次のように定義される．

$$x = (x_1, x_2) \in V^2 \text{ に対して}, \quad \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

次に紹介するのは良く知られた Minkowski (ミンコフスキー) の不等式である．$j = 1, 2, \ldots, n$ に対して a_j, b_j をそれぞれ正の数とする．すると

(M-1)　$p \geq 1$ のとき，

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^p + b_j^p)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

(M-2)　$0 < p < 1$ のとき，

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^p + b_j^p)\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(M-1), (M-2) を用いることによって，$p \geq 1$ のときは $\|x\|_p$ はノルムになることがわかり，$0 < p < 1$ のときはそうでないことがわかる．

また，$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ であることは次のようにしてわかる．

$M = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ とすると，$p \to \infty$ のときに，

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (2M^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} M \to M$$

であるから $\|x\|_\infty \leq M$. 逆に

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (M^p)^{\frac{1}{p}} = M$$

であるから，$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

これより $p \geq 1$ のとき，l^p はバナッハ空間であり，Theorem J-N から特に l^2 はヒルベルト空間になることがわかる．

次の Figure 3 は $0 < p \leq \infty$ における $\|x\|_p = 1$ (l^p の単位円) を表したものである．いうまでもないが，$\|x\|_2 = 1$ はヒルベルト空間 l^2 の単位円である．

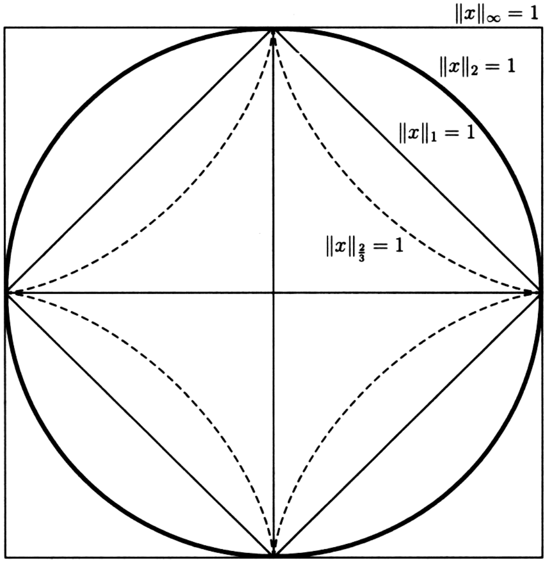


Figure 3　§1.2 の Remark 1 に関するメモ.

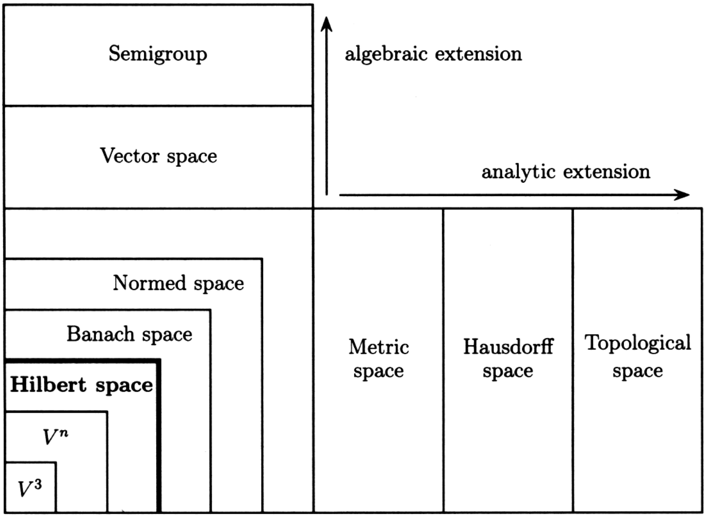


Figure 4　§1.1, §1.2 に関する定義.

§1.3　ヒルベルト空間の直交分解

Definition 1. 集合 M がヒルベルト空間 H の **closed subspace** (閉部分空間) であるとは, $\overline{M} = M$ を満たす H の部分空間のこととする．ただし, $\overline{M}$ は M の閉包を表すものとする．

Theorem 1 (minimizing vector). M をヒルベルト空間 H の閉部分空間とする．x を H のベクトルとし,

$$\delta = \inf\{\|y - x\| : y \in M\}$$

とすると,

(1) $$\|y_0 - x\| = \delta$$

となるような M の元 y_0 が一意に存在する．

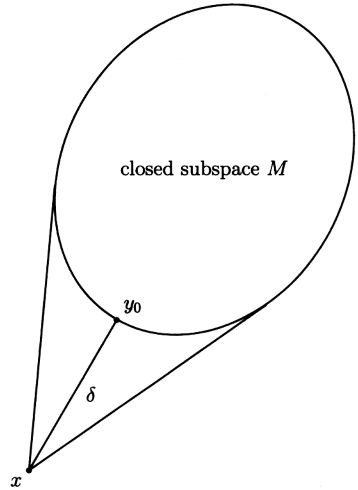


Figure 5　§1.3 の Theorem 1 に関するメモ．

Proof. (i) y_0 **の存在性の証明.**

δ の定義により，$\|y_n - x\| \to \delta$ となる M のベクトル列 $\{y_n\}$ が存在する．そして，§1.1 の parallelogram law により，次の等式が任意の自然数 n, m に対して成り立つ．

(2) $$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\|^2.$$

ここで M は閉部分空間であることから，$\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ であり，δ の定義により

$$\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\|^2 \geq \delta^2$$

となる．よって (2) により次の式が成り立つ．

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2.$$

ここで，$n \to \infty$, $m \to \infty$ とすると，上式の右辺は $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$ へ収束する．すなわち $\{y_n\}$ は Cauchy 列であり，H がヒルベルト空間であることにより，$\{y_n\}$ は収束列となる．もし $y_n \to y_0$ であれば，M が閉部分空間であることにより $y_0 \in M$ であり，ノルムの連続性より次を得る．

$$\|y_0 - x\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = \delta.$$

(ii) y_0 **の一意性の証明.**

(i) では $\|y_0 - x\| = \delta$ となるような $y_0 \in M$ が存在することを示した．

ここで $\|y_1 - x\| = \delta$ なるような $y_1 \in M$ が存在すると仮定する．そして，$y_1 = y_0$ を示せばよい．(2) と同様に，§1.1 の parallelogram law によって，次の (3) を得る．

(3) $$\|y_1 - y_0\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y_1 + y_0) - x\right\|^2.$$

M が閉部分空間であることにより $\frac{1}{2}(y_1 + y_0) \in M$, そして δ の定義により

$$\left\|\frac{1}{2}(y_1 + y_0) - x\right\|^2 \geq \delta^2$$

を得る．したがって (3) から

(4) $$\begin{aligned}\|y_1 - y_0\|^2 &\leq 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - 4\delta^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$y_1 = y_0$ が (4) からわかり，y_0 の一意性が示された．

ゆえに Theorem 1 が証明できた． □

Remark 1. 証明を吟味することにより，Theorem 1 は M が閉凸集合でも成立することがわかる．

Definition 2. M をヒルベルト空間 H の閉部分空間とする．このとき，M の **orthogonal complement subspace** (直交補空間) $M^\perp$ は次のように定義される．

$$M^\perp = \{z \in H : \text{すべての } y \in M \text{ に対して } (z, y) = 0\}.$$

Definition 3. ベクトル $x \in H$ が $y \in M$ と $z \in M^\perp$ を用いて $x = y + z$ と表されたとき，単に $x = y \oplus z$ とかく．

Theorem 2 (orthogonal decomposition (直交分解)). 集合 M をヒルベルト空間 H の閉部分空間とする．すると，任意のベクトル $x \in H$ は，$y \in M$ と $z \in M^\perp$ を用いて次のように一意に表現できる．

$$x = y \oplus z. \tag{5}$$

簡単のため (5) は $H = M \oplus M^\perp$ と表すことにする．

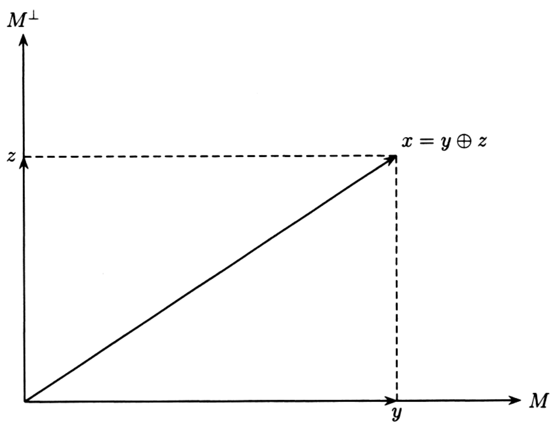


Figure 6　§1.3 の Theorem 2 に関するメモ．

Proof. (i) **(5) の証明.**

(a) $x \in M$ の場合. $y = x$, $z = 0 \in M^{\perp}$ととればよい. つまり $x = x \oplus 0$.

(b) $x \notin M$ の場合. Theorem 1 によって,

$$d(x, y) = \|x - y\| = d(x, M) \tag{6}$$

を満たすような $y \in M$ が一意に存在する. ここで $z = x - y$ とおいて $z \in M^{\perp}$ であることを示せばよい. M は H の閉部分空間であり, $y \in M$ であるから, 任意のベクトル $u \in M$ に対して,

$$y + tu \in M \tag{7}$$

が任意の複素数 t で成り立つ. (6), (7), そして $d(x, M)$ の定義により, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= d^2(x, M) \\ &\leq \|x - (y + tu)\|^2 \\ &= \|z - tu\|^2 \\ &= \|z\|^2 - \bar{t}(z, u) - t(u, z) + |t|^2\|u\|^2. \end{aligned} \tag{8}$$

さて, $z \in M^{\perp}$ を示すためには任意の $u \in M$ に対して $(z, u) = 0$ を示せばよい.

$u = 0$ の場合は明らかに $(z, u) = 0$ は成り立つ. よって, $u \neq 0$ の場合だけを考えればよい. (8) において $t = \dfrac{(z, u)}{\|u\|^2}$ とおく. すると,

$$0 \leq \frac{-2|(z, u)|^2}{\|u\|^2} + \frac{|(z, u)|^2}{\|u\|^2} = \frac{-|(z, u)|^2}{\|u\|^2}$$

であることにより $(z, u) = 0$. よって $z = x - y \in M^{\perp}$ が示された.

(ii) **(5) の一意性の証明.**

(i) によって, 任意のベクトル $x \in H$ はある $y \in M$, $z \in M^{\perp}$ を用いて $x = y \oplus z$ と表せることが示された. ここで, x が y, z とは異なる $y' \in M$, $z' \in M^{\perp}$ を用いて $x = y' \oplus z'$ と表すことができると仮定する. すると, $y - y' = z' - z \in M \cap M^{\perp} = \{0\}$ となり, すなわち $y = y'$, $z = z'$ であり (5) の一意性が示された.

よって Theorem 2 は証明できた. □

Definition 4. X を複素数 $\mathbb{C}$ 上のノルム空間とする. X から $\mathbb{C}$ への写像 f がすべての $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{9}$$

を満たすとき, f を X から $\mathbb{C}$ への **linear functional** (線形汎関数) と

よび，f の **norm** (ノルム) $\|f\|$ は次のように定義される．

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}.$$

Theorem 3 (Riesz's representation theorem (Riesz (リース) の表現定理)). H を複素数 $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間とする．任意の固定したベクトル $y \in H$ に対して，$f(x)$ を次のように定義する．

(10) 任意のベクトル $x \in H$ に対して $f(x) = (x, y)$.

このとき，$f(x)$ は $\|f\| = \|y\|$ を満たすような H から $\mathbb{C}$ への bounded linear functional (有界線形汎関数) となる．

逆に，H から $\mathbb{C}$ への任意の有界線形汎関数 f に対して，(10) を満たすような $y \in H$ が一意に存在する．

Proof. (10) で定義された関数 f は明らかに (9) を満たす H から $\mathbb{C}$ への線形汎関数である．そして，Schwarz の不等式により

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|, \quad \text{すなわち} \quad \|f\| \leq \|y\|.$$

一方，

$$|f(y)| = |(y, y)| = \|y\|^2 \leq \|f\| \, \|y\|$$

であるから，$\|y\| \leq \|f\|$. よって $\|f\| = \|y\|$ が成り立つ．

逆に，M を $M = \{x : f(x) = 0\}$ と定義する．

$M = H$ の場合． $y = 0 \in H$ として，$f(x) = (x, y)$ とすればよい．

$M \subset H$ の場合． Theorem 2 によって，$\|z\| = 1$ であるような $z \in M^{\perp}$ が存在する．そこで，任意の $x \in H$ に対して $w = x - \dfrac{f(x)}{f(z)} z$ とする．すると

$$f(w) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$$

となり，$w \in M$ がわかる．よって $(w, z) = 0$ より

$$(x, z) = \left(w + \frac{f(x)}{f(z)} z, z \right) = \frac{f(x)}{f(z)}.$$

つまり，$y = \overline{f(z)} z$ とすれば

$$f(x) = (x, \overline{f(z)} z) = (x, y)$$

となる．

なお，y の一意性は (x, y) が内積であることより明らかである． □

§1.4 Gram-Schmidt の直交化法とその応用

§1.4.1 Gram-Schmidt の直交化法

Definition 1. $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して，e_j をヒルベルト空間 H のベクトルとする．ベクトル列 $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ が **orthonormal system** (正規直交系) であるとは，

(1)
$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

が成り立つことである．

正規直交系のベクトルは線形独立であることが次のようにわかる．実際に $\sum_{j=1}^{n} c_j e_j = 0$ とすると，(1) によって

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j, e_k \right) = c_k (e_k, e_k) = c_k$$

が $k = 1, 2, \ldots, n$ で成り立つ．すなわち $\sum_{j=1}^{n} c_j e_j = 0$ から，$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $c_k = 0$ が得られる．つまり正規直交系は線形独立である．

逆に，線形独立な H のベクトル列からは，次のようにして H の正規直交系を作ることができる．

Theorem G-S (Gram-Schmidt (グラム–シュミット) の直交化法). $S_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を H の線形独立なベクトル列とする．このとき，S_1 から H の正規直交系 $S_2 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を作ることができる．

Proof. $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ とおく．すると $\|e_1\| = 1$ となる．

次に $y_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1$ とおく．すると

(2)
$$(y_2, e_1) = (x_2, e_1) - (x_2, e_1)(e_1, e_1) = 0.$$

そして $e_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$ とおけば，(2) より $(e_2, e_1) = 0$ かつ $\|e_2\| = 1$ となる．

次に，$y_3 = x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2$ とおく．すると

$$(y_3, e_1) = (x_3, e_1) - (x_3, e_1)(e_1, e_1) - (x_3, e_2)(e_2, e_1) = 0, \tag{3}$$

$$(y_3, e_2) = (x_3, e_2) - (x_3, e_1)(e_1, e_2) - (x_3, e_2)(e_2, e_2) = 0 \tag{4}$$

となり，$e_3 = \dfrac{y_3}{\|y_3\|}$ とおくことによって，(3), (4) により $j = 1, 2$ に対して $(e_3, e_j) = 0$, $\|e_3\| = 1$ を得る．

一般的に，$j = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$y_j = x_j - \sum_{k=1}^{j-1} (x_j, e_k)e_k$$

として，$e_j = \dfrac{y_j}{\|y_j\|}$ とおくと，同様のやり方で $S_2 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ は H の正規直交系であるということを帰納的に示すことができる． □

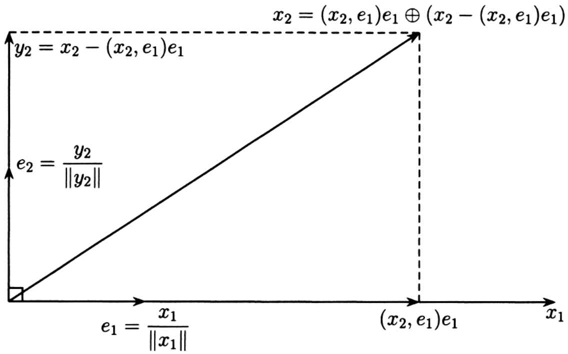


Figure 7 §1.4.1 の Theorem G-S に関するメモ．

Remark 1. Gram-Schmidt の直交化法によれば，Theorem G-S は次の三角行列を用いて表される．

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

ここで，$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_{kk}b_{kk} = 1$ が成り立つ．なぜならば，(6) の右辺の三角行列は (5) の右辺の三角行列の逆行列になっているからである．なお Gram-Schmidt の直交化法によれば，$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_{kk} \neq 0$ であることに注意する．

§1.4.2 Gram-Schmidt の直交化法の応用

Definition 1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をヒルベルト空間 H 上のベクトルとする．このとき，$G = \big((x_j, x_k)\big)$ で定義される $n \times n$ 行列 G を **Gramian** という，すなわち，

$$G = G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{pmatrix}.$$

Theorem H (Hadamard (アダマール) の定理). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をヒルベルト空間 H 上の 0 でないベクトルとする．このとき，Gramian $G = \big((x_j, x_k)\big)$ の行列式 $|G| = |G(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ は次を満たす．

$$(1)\qquad 0 \leq |G(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cdots \|x_n\|^2.$$

(i) なお，(1) の左辺の等号が成り立つ必要十分条件は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が線形従属のときである．

(ii) さらに，(1) の右辺の等号が成り立つ必要十分条件は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が互いに直交しているときである．

Hadamard の定理にはこれまで多くの優れた証明が得られている (§1.1, 1.2, 1.3, 1.4 に関するメモ・注釈・参考文献を参照). そのうちのいくつかは，行列式についての Jacobi (ヤコビ) の定理に基づいており，その他は Hermitian form (エルミート形式) についての Sylvester (シルベスター) の定理に基づいている．しかしながら，いずれの証明も複雑で技巧的であった．そこで本書では，Gram-Schmidt の直交化法だけを用いた本質的で簡潔な証明を紹介する．

Proof of Theorem H. (a) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を H 上の線形独立なベクトルとする．ここで，A を §1.4.1 の (5) で用いた三角行列とする．そして A^* を行列 A の共役転置行列とする．$S_2 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ が H の正規直交系であることより，簡単な計算によって次の式が得られる．

$$
(2)\quad AGA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{pmatrix}
\times \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \ldots & \overline{a_{n1}} \\ 0 & \overline{a_{22}} & \ldots & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1, e_1) & (x_1, e_2) & \ldots & (x_1, e_n) \\ (x_2, e_1) & (x_2, e_2) & \ldots & (x_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, e_1) & (x_n, e_2) & \ldots & (x_n, e_n) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.
$$

(2) の両辺の行列式をとると，$|A^*| = \overline{|A|}$ であるから，

(3) $$|G| = \frac{1}{|A|\,|A^*|} = \frac{1}{|a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}|^2}.$$

一方，$S_2 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ が H の正規直交系であることより，§1.4.1 の (6) から次の (4) を得る．

(4) $$\begin{aligned}\|x_k\|^2 &= \|b_{k1}e_1 + b_{k2}e_2 + \cdots + b_{kk}e_k\|^2 \\ &= |b_{k1}|^2 + |b_{k2}|^2 + \cdots + |b_{kk}|^2 \\ &\geq |b_{kk}|^2.\end{aligned}$$

そして，$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_{kk}b_{kk} = 1$ であることより，(3), (4) から次の (5) を得る．

(5) $$\begin{aligned}\|x_1\|^2\|x_2\|^2\cdots\|x_n\|^2 &\geq |b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}|^2 \\ &= \frac{1}{|a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}|^2} = |G|.\end{aligned}$$

(5) の等号が成り立つ必要十分条件は，(4) によって，$j > k$ のとき $b_{jk} = 0$ となることであるということがわかる．そして Gram-Schmidt の直交化法によって，次の命題 (A)〜(C) は互いに同値であるということがわかる．

(A) $(x_j, x_k) = 0$ ($j \neq k$ のとき),

(B) $a_{jk} = 0$ ($j > k$ のとき),

(C) $b_{jk} = 0$ ($j > k$ のとき).

よって (5) の等号が成り立つ必要十分条件は，$j \neq k$ のとき $(x_j, x_k) = 0$ である．これらのことより，Theorem H の右辺と (ii) が示された．

(b) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を H 上の線形従属なベクトルとする．すると，次の式

(6) $$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$$

を満たすようなスカラー列 $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \neq \{0, 0, \ldots, 0\}$ が存在する．そして，(6) より

$$(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, x_k) = 0$$

が $k = 1, 2, \ldots, n$ で成り立ち，整理すると，

$$\begin{gathered}c_1(x_1, x_1) + c_2(x_2, x_1) + \cdots + c_n(x_n, x_1) = 0 \\ c_1(x_1, x_2) + c_2(x_2, x_2) + \cdots + c_n(x_n, x_2) = 0 \\ \vdots \\ c_1(x_1, x_n) + c_2(x_2, x_n) + \cdots + c_n(x_n, x_n) = 0.\end{gathered}$$

ここで，$\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \neq \{0, 0, \ldots, 0\}$ であることより，行列式の性質から

$$
\begin{aligned}
|G| &= |G(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \\
&= \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \ldots & (x_n, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_n, x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

よって，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が H 上の線形従属なベクトルならば $|G| = 0$ となる．つまり，(i) の必要条件が示された．

逆に，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が H 上の線形独立なベクトルであるとき，(3) によって $0 < |G|$ がわかる．よって，対偶をとることにより (i) の十分条件も示された．

よって Theorem H は証明された. □

Remark 1. Theorem H において，$n = 2$ とおく．すると Theorem H から

$$
0 \leq \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) \end{vmatrix} = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - |(x_1, x_2)|^2
$$

となり，等号条件は x_1, x_2 が線形従属である．つまりこれは Schwarz の不等式である．よって，Theorem H は Schwarz の不等式の拡張であるとみることができる．

Remark 2. 3 次元空間 V^3 において，$x_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $x_2 = (b_1, b_2, b_3)$, $x_3 = (c_1, c_2, c_3)$ とし，scalar triple product $[x_1, x_2, x_3]$ を次のように定義する．

$$
[x_1, x_2, x_3] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.
$$

このとき，

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad [x_1, x_2, x_3]^2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & (x_1, x_3) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & (x_2, x_3) \\ (x_3, x_1) & (x_3, x_2) & (x_3, x_3) \end{vmatrix} \\
&\leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \|x_3\|^2.
\end{aligned}
$$

が成り立つ．等号条件は，Theorem H により x_1, x_2, x_3 が互いに直交していることである．なお，$[x_1, x_2, x_3]$ は 3 つのベクトル x_1, x_2, x_3 によって構成される“傾いた直方体”(平行六面体) の体積を表しているが，(7) によると，平行六面体

の体積は $\|x_1\|\,\|x_2\|\,\|x_3\|$ によって上から押さえられるという非常に興味深い事実がわかる.

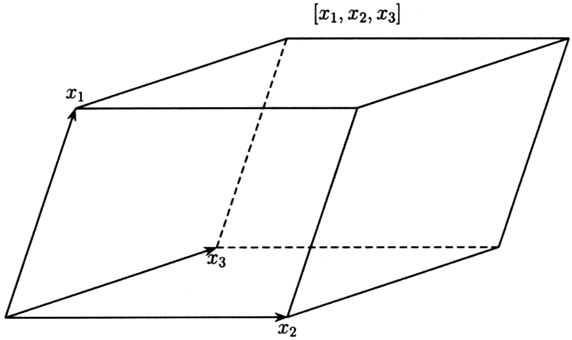


Figure 8　§1.4.2 の Remark 2 に関するメモ.

Gram-Schmidt の直交化法の応用として，次の結果が得られる.

Theorem 1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をヒルベルト空間 H 上の線形独立なベクトルとする．そして，$M = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ で張られる H の部分空間とする．このとき，$x \notin M$ に対して次の式が成り立つ.

(8) $$d^2(x, M) = \frac{|G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)|}{|G(x_1, x_2, \ldots, x_n)|}.$$

ここで，$d(x, M)$ は x と M との距離を表す.

Proof. A を §1.4.1 の (5) の右辺で用いた三角行列とする．§1.4.2 の (2) により，

(9) $$AG(x_1, x_2, \ldots, x_n)A^* = E.$$

ここで E は n 次の単位行列とする．さて，$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ とおくと，(9) より

(10) $$A_1 G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)A_1^* = G(x, e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

を得る．よって，(10) において両辺の行列式をとることによって，

(11) $$\begin{aligned} &\frac{|G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)|}{|G(x_1, x_2, \ldots, x_n)|} \\ &= |A|\,|A^*|\,|G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \qquad ((3)\text{ より}) \\ &= |A_1|\,|A_1^*|\,|G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \qquad (|A||A^*| = |A_1||A_1^*|\text{ より}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |G(x, e_1, e_2, \ldots, e_n)| \\
&= \begin{vmatrix} (x,x) & (x,e_1) & \cdots & (x,e_n) \\ (e_1,x) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n,x) & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x,e_j)|^2 \\
&= \left\| x - \sum_{j=1}^{n} (x,e_j)e_j \right\|^2 \qquad (\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \text{ は正規直交系より}) \\
&= d^2(x, M).
\end{aligned}
$$

が得られる．よって Theorem 1 が示された. □

§1.4.3 Gramian transformation formula

§1.4.2 の Theorem H の応用として，次の結果が得られる.

Theorem 1 (Gramian transformation formula). 任意の $x_i \in H$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して，$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ とする．そして $A = \big(a_{ij}\big)$ とすると，次が成り立つ.

(1) $$G(y_1, y_2, \ldots, y_n) = AG(x_1, x_2, \ldots, x_n)A^*,$$

(2) $$|G(y_1, y_2, \ldots, y_n)| = |\det A|^2\, |G(x_1, x_2, \ldots, x_n)|.$$

ここで，A^* は A の共役転置行列のことである.

Proof. 簡単な計算により，次の式を得る.

(3) $AG(x_1, x_2, \ldots, x_n)A^*$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} (x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \ldots & (x_1,x_n) \\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \ldots & (x_2,x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n,x_1) & (x_n,x_2) & \ldots & (x_n,x_n) \end{pmatrix} \times
$$

$$\times \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \ldots & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \ldots & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \ldots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \ldots & (x_1, y_n) \\ (x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \ldots & (x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, y_1) & (x_n, y_2) & \ldots & (x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \ldots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \ldots & (y_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \ldots & (y_n, y_n) \end{pmatrix}$$

$$= G(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

つまり (1) が示された.

次に (1) の両辺に行列式をとると, $|A^*| = \overline{|A|}$ より

$$\begin{aligned} |G(y_1, y_2, \ldots, y_n)| &= |A|\,|A^*|\,|G(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \\ &= |\det A|^2\,|G(x_1, x_2, \ldots, x_n)|. \end{aligned}$$

これより (2) を得る. よって証明ができた. □

Theorem 1 から次の系を得る.

Corollary 2. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 任意のベクトル $x, y \in H$, 複素数 $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{C}$ に対して,

(4) $$G(\lambda_1 x + \mu_1 y, \lambda_2 x + \mu_2 y) = AG(x, y)A^*,$$

(5) $$\begin{aligned} &\|\lambda_1 x + \mu_1 y\|^2 \|\lambda_2 x + \mu_2 y\|^2 - |(\lambda_1 x + \mu_1 y, \lambda_2 x + \mu_2 y)|^2 \\ &\quad = |\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, A^* は A の共役転置行列とする.

Corollary 2 より次の結果を得る.

Corollary 3. 任意のベクトル $x, y \in H$, 複素数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，次が成り立つ．

(6) $$\|x\|^2\|\alpha x + y\|^2 - |(x, \alpha x + y)|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - |(x, y)|^2.$$

(7) $$\|x + \alpha y\|^2\|x + \beta y\|^2 - |(x + \alpha y, x + \beta y)|^2 = |\alpha - \beta|^2(\|x\|^2\|y\|^2 - |(x, y)|^2).$$

Proof. Corollary 2 において，それぞれ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ とおけばよい． □

§1.4.4 Bessel の不等式 と Parseval の等式

Theorem 1 (Bessel (ベッセル) の不等式). $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を内積空間 X の正規直交系とする．このとき，任意のベクトル $x \in X$ に対して，

(1) $$\left\| x - \sum_{j=1}^n (x, e_j)e_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2.$$

よって，

(2) $$\sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{(Bessel の不等式)}$$

が成り立つ．

Proof. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を任意の複素数とする．すると，

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\|^2 &= \left(x - \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j,\, x - \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) \\ &= \|x\|^2 - \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, x \right) - \left(x, \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) + \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{(x, e_j)} - \sum_{j=1}^n (x, e_j)\overline{\lambda_j} + \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 + \sum_{j=1}^n |(x, e_j) - \lambda_j|^2.\end{aligned}$$

ここで $\lambda_j = (x, e_j)$ とおくことによって (1) を得る．

(2) は (1) より簡単に示すことができる． □

Corollary 2. $\{e_1, e_2, \dots\}$ を内積空間 X の正規直交系とする．このとき，任意のベクトル $x \in X$ に対して $\{(x, e_1), (x, e_2), \dots\} \in l^2$, そして

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{3}$$

が成り立つ．

Definition 1. $S = \{e_1, e_2, \dots\}$ をヒルベルト空間 H の正規直交系とする．S が H において極大，つまり S を含むような H の正規直交系が存在しないとき，S を H の **complete orthonormal system** (完全正規直交系) という．これは任意の j に対して $(x, e_j) = 0$ ならば，$x = 0$ となることと同値である．

Theorem 3. $S = \{e_1, e_2, \dots\}$ をヒルベルト空間 H の正規直交系とする．このとき，次の (i)〜(v) は互いに同値である．

(i) $S = \{e_1, e_2, \dots\}$ が完全正規直交系.

(ii) $x \in H$ に対して，写像

$$\Phi \ : \ x \longrightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_j, \dots\} \qquad (c_j = (x, e_j))$$

とすると，Φ は H から l^2 への同型写像となる．

(iii) $x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j$ がすべての $x \in H$ で成り立つ．

(Fourier (フーリエ) 展開)

(iv) $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2$. **(Parseval (パーセバル) の等式)**

(v) $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j)\overline{(y, e_j)}$ がすべての $x, y \in H$ で成り立つ．

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i) の順に示す．

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Φ が一対一写像でないと仮定する．すると，$(x, e_j) = (y, e_j)$ を満たすようなある $x \neq y$ が存在する．つまり $x - y \neq 0$ に対して $(x - y, e_j) = 0$ が成り立つ．これは，$S = \{e_1, e_2, \dots\}$ が完全正規直交系であることに矛盾する．Φ が全射であることは，$S = \{e_1, e_2, \dots\}$ が正規直交系であることより明らか．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). $(y, e_j) = c_j$, $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ とする．すると，

$$\Phi(y) = \{c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots\} = \left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j, e_j\right)\right\} = \Phi(x),$$

つまり $\Phi(x-y) = 0$ であり，Φ は同型写像であることより $x = y$.

(iii) $\Longrightarrow$ (v). $S = \{e_1, e_2, \ldots.\}$ が正規直交系であることより，

$$(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}(x, e_j)e_j, \sum_{j=1}^{\infty}(y, e_j)e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}(x, e_j)\overline{(y, e_j)}.$$

(v) $\Longrightarrow$ (iv). (v) において $x = y$ とおけばよい．

(iv) $\Longrightarrow$ (i). $S = \{e_1, e_2, \ldots\}$ が完全正規直交系でないと仮定する．このとき，任意の j に対して，$(x, e_j) = 0$ となるような $x \neq 0$ が存在する．このことより，

$$0 \neq \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 = 0$$

は成り立ち，(iv) に矛盾する． □

§1.1, 1.2, 1.3, 1.4 に関するメモ・注釈・参考文献

最初に，ヒルベルト空間について数ある書籍の中から，初学者のために以下の書籍をあげておこう．

S.K.Berberian *Introduction to Hilbert Space*, Chelsea Publishing Company, New York, 1961.

C.L.DeVito *Functional analysis and linear operator theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1990.

P.R.Halmos

[1] *Introduction to Hilbert space and the theory on spectral multiplicity*, Chelsea, New York, 1951.

[2] *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Litton Educational Publishing, Inc., 1958.

E.Kreyszig *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

J.R.Retherford *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

§1.1 の Theorem 2 (polarization identity) は §2.1.3 の Theorem 1 , Theorem 2 で一般化される．

§1.4.2 の Theorem H は次で示されている．

T.Furuta *An elementary proof of Hadamard's theorem*, Mat. Vesnik, **23** (1971), 267–269.

§1.4.2 の Theorem 1 をはじめ，その他の結果は次で示されている．

M.Fujii, T.Furuta and R.Nakamoto *Applications of Gramian transformation formula*, Scientiae Mathematicae, **3**(2000), 81–86.

§1.4.3 の Theorem 1 は次の論文の中の Lemma 8.7.1 で示されている．

P.J.Davis *Interpolation and Approximation*, Dover Publishing, Inc., New York, 1963.

2

有界線形作用素の基本的性質

§2.1　ヒルベルト空間上の有界線形作用素

§2.1.1　有界線形作用素とノルム

Definition 1. 次の (i), (ii) を満たすとき，ヒルベルト空間 H から H への写像 T は H 上の **linear operator** (線形作用素) であるという．

(i) additive (加法的)：
任意の $x, y \in H$ について，$T(x+y) = Tx + Ty$.

(ii) homogeneous (斉次的)：
任意の $x \in H$, 複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ について，$T(\alpha x) = \alpha Tx$.

Definition 2. ヒルベルト空間 H 上の線形作用素 T について，すべての $x \in H$ について $\|Tx\| \le c\|x\|$ が成り立つような定数 $c > 0$ が存在するとき，T は **bounded linear operator** (有界線形作用素) であるという．このとき，T の **operator norm** (作用素ノルム) $\|T\|$ を

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \text{すべての } x \in H \text{ について } \|Tx\| \le c\|x\|\} \tag{1}$$

と定義する．

identity operator (恒等作用素) I とは，すべての $x \in H$ について $Ix = x$ であるような写像であり，**zero operator** (零作用素) 0 とは，すべての $x \in H$

について $0x = 0$ であるような写像である．これらは明らかに H 上の有界線形作用素である．

Theorem 1. ヒルベルト空間 H 上の任意の有界線形作用素 T について，

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

が成り立つ．

Proof. $b = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$ とおく．T が有界のとき，$\|x\| = 1$ であるような $x \in H$ について (1) より

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| = \|T\|$$

が成り立つので，$b \leq \|T\|$ である．逆に，任意の $x \in H$ について

$$\|Tx\| = \left\|T\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \|x\| \leq b\|x\|,$$

よって (1) より $\|T\| \leq b$ が成り立つ．ゆえに

$$\|T\| = b = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

である． □

Theorem 2. ヒルベルト空間 H 上の任意の有界線形作用素 T について，

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

が成り立つ．

Proof. 次の不等式が成り立つことは明らかである．

$$\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \geq \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \|T\|. \tag{2}$$

最後の等号は Theorem 1 による．逆に

$$\begin{aligned} \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} &\leq \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : \|x\| \leq 1\right\} \\ &= \sup\{\|Ty\| : \|y\| = 1\} \\ &= \|T\| \qquad (\text{Theorem 1 より}). \end{aligned} \tag{3}$$

したがって (2), (3) より，定理は証明された． □

Theorem 3. ヒルベルト空間 H 上の任意の有界線形作用素 T について，

$$\|T\| = \sup\{|(Tx, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\}$$

が成り立つ．

Proof. $\|y\| = 1$ であるような $y \in H$ について，Schwarz の不等式より

$$|(Tx, y)| \leq \|Tx\| \, \|y\| = \|Tx\|$$

である．したがって，

$$\sup\{|(Tx, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\} \leq \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \|T\|$$

が成り立つ．最後の等号は Theorem 1 による．

一方，逆向きの不等式は次のように導かれる．

$$\begin{aligned}
&\sup\{|(Tx, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\} \\
&\qquad \geq \sup\left\{ \left|\left(Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right)\right| : \|x\| = 1\right\} \qquad \left(\left\|\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\| = 1 \text{ より}\right) \\
&\qquad = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \\
&\qquad = \|T\| \qquad (\text{Theorem 1 より}).
\end{aligned}$$

ゆえに，定理は証明された． □

Theorem 4. ヒルベルト空間 H 上の任意の線形作用素 T について，次の (i)∼(iii) は同値である．

(i) T は有界である．

(ii) T は H 上で連続である．

(iii) T は H 上のある一点 x_0 で連続である．

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 任意の $x \in H$ について

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \, \|x_n - x\|$$

であるので，よって $x_n \to x$ のとき $Tx_n \to Tx$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかである．

(iii) $\Longrightarrow$ (i). (i) の否定として，T が有界でないと仮定する．このとき各自然数 n について $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$ を満たす 0 でない $x_n \in H$ が存在する．ここで $y_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$

とおくと $\|y_n\| = \dfrac{1}{n}$ である．任意の $x_0 \in H$ について，明らかに $x_0 + y_n \to x_0$ であるが，一方

$$\|T(x_0 + y_n) - Tx_0\| = \|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|}$$
$$> \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1.$$

よって T は x_0 で不連続であり，これは (iii) の否定である．対偶が示されたので，よって (iii) $\Longrightarrow$ (i) は証明された．　□

Definition 3. ヒルベルト空間 H 上のすべての有界線形作用素からなる集合を $B(H)$ と表す．いうまでもなく，$B(H)$ はすべての 2×2 行列からなる集合の拡張である．

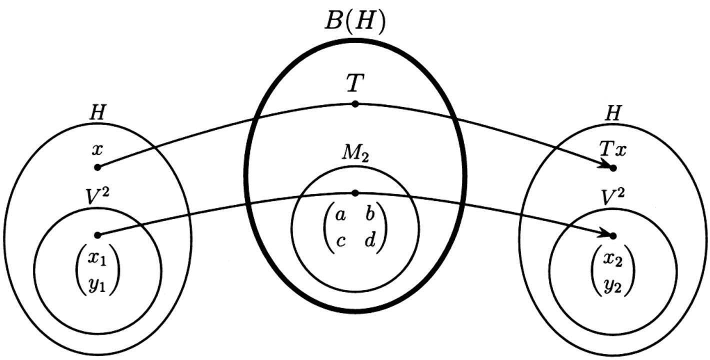


Figure 9　§2.1.1 の Definition 3 に関するメモ．

ヒルベルト空間 H 上の任意の線形作用素 S, T と複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ について，

和 $S+T$ を $(S+T)x = Sx + Tx$,

スカラー倍 αT を $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$

により定義する．また，

積 ST を $(ST)x = S(Tx)$

により定義する．このとき $S+T$, αT, ST もまた H 上の線形作用素であることは明らかである．さらに S, T が有界であるとき，それらの作用素ノルムにつ

いて次の結果が成り立つ.

Theorem 5. S, T をヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素とする. このとき次の性質が成り立つ.

(i) 任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ について, $\|\alpha T\| = |\alpha|\,\|T\|$.

(ii) $\|S + T\| \le \|S\| + \|T\|$.

(iii) $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$.

Proof. $\|T\|$ の定義より明らかである. □

ヒルベルト空間 H 上の任意の有界線形作用素 T について,

$$\|T\| \ge 0, \quad \|T\| = 0 \iff T = 0$$

は定義より明らかである. よって Theorem 5 より $B(H)$ は作用素ノルムに関してノルム空間となる. 実際は, さらにバナッハ空間であることを示すことができる.

§2.1.2　共役作用素

T を有界線形作用素とする. 各ベクトル $y \in H$ に対して, H 上の関数 $f(x) = (Tx, y)$ を考える. §1.3 にある Riesz の表現定理より, すべての $x \in H$ について $f(x) = (Tx, y) = (x, u)$ を満たすような $u \in H$ はただ一つ存在する. よって $y \mapsto u$, すなわち

$$(Tx, y) = (x, u) = (x, T^* y)$$

によって H から H への写像 T^* を定義することができる. この T^* を T の **adjoint operator** (共役作用素) という.

Theorem 1. T をヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素とする. このとき T^* もまた H 上の有界線形作用素であり, さらに次の性質を満たす.

(i) $\|T^*\| = \|T\|$.

(ii) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

(iii) 任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ について，$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.

(iv) $(T^*)^* = T$.

(v) $(ST)^* = T^* S^*$.

Proof. $y_1, y_2 \in H$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とする．任意の $x \in H$ について

$$\begin{aligned}(x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) &= (Tx, \alpha y_1 + \beta y_2)\\ &= \bar{\alpha}(Tx, y_1) + \bar{\beta}(Tx, y_2)\\ &= (x, \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2),\end{aligned}$$

ゆえに

$$T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2$$

であり，すなわち T^* は線形である．

次に，T^* が有界であることを示す．$x = T^* y$ とおくと，Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}\|T^* y\|^2 &= (T^* y, T^* y) = (TT^* y, y)\\ &\leq \|TT^* y\|\,\|y\| \leq \|T\|\,\|T^* y\|\,\|y\|,\end{aligned}$$

よって任意の $y \in H$ について $\|T^* y\| \leq \|T\|\,\|y\|$ が成り立ち，すなわち T^* は有界であり $\|T^*\| \leq \|T\|$ である．ゆえに $(T^*)^*$ もまた有界線形作用素であり，$\|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$ である．一方，任意の $x, y \in H$ について

$$(y, (T^*)^* x) = (T^* y, x) = \overline{(x, T^* y)} = \overline{(Tx, y)} = (y, Tx),$$

よって $(T^*)^* = T$ であり，(iv) が示された．さらに

$$\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\| \leq \|T\|,$$

よって (i) が示された．

(ii) は次の式より明らかである．

$$\begin{aligned}(x, (T_1 + T_2)^* y) &= ((T_1 + T_2)x, y) = (T_1 x, y) + (T_2 x, y)\\ &= (x, T_1^* y) + (x, T_2^* y) = (x, (T_1^* + T_2^*)y).\end{aligned}$$

(iii) もまた次の式より明らかである．

$$(x, (\alpha T)^* y) = (\alpha T x, y) = \alpha (Tx, y) = \alpha (x, T^* y) = (x, \bar{\alpha} T^* y).$$

最後に，任意の $x, y \in H$ について

$$(x, (ST)^* y) = (STx, y) = (Tx, S^* y) = (x, T^* S^* y),$$

よって $(ST)^* = T^* S^*$ であり，(v) が示された． □

Corollary 2. T を有界線形作用素とする．このとき次が成り立つ．

(i) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

(ii) $T^*T = 0$ であるための必要十分条件は $T = 0$ である．

Proof. (i) Theorem 1 の (i) より $\|T^*\| = \|T\|$ であるので，任意の $x \in H$ について

$$\|T^*Tx\| \leq \|T^*\|\,\|Tx\| \leq \|T^*\|\,\|T\|\,\|x\| = \|T\|^2\|x\|,$$

よって $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$ である．逆に，任意の $x \in H$ について

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \leq \|T^*Tx\|\,\|x\| \leq \|T^*T\|\,\|x\|^2,$$

よって $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ である．ゆえに $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ であり，T を T^* と置き換えることにより $\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|TT^*\|$ であるので，よって定理は示された．

(ii) は (i) より明らかである． □

§2.1.3 generalized polarization identity とその応用

以下，単に作用素という場合は，ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素を意味するものとする．

Definition 1. 複素ベクトル空間 X 上の **bilinear functional** (双線形汎関数) $f(x, y)$ とは，次のように定義される：$f(x, y)$ は x と y に関する複素数値関数であり，$f(x, y) = g_y(x) = h_x(y)$ とおく．このとき，各 $y \in H$ に対して $g_y(x)$ は x に関する linear functional (線形汎関数) であり，各 $x \in H$ に対して $h_x(y)$ は y に関する conjugate linear functional (共役線形汎関数)，すなわち任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ について $h_x(\alpha y) = \bar{\alpha} h_x(y)$ が成り立つ．

Theorem 1. $f(x, y)$ が複素ベクトル空間 X 上の bilinear functional であるとき，任意の $x, y \in X$ について

$$f(x, y) = \frac{1}{4}\{f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y)\} + \frac{1}{4}i\{f(x+iy, x+iy) - f(x-iy, x-iy)\}$$

が成り立つ．

Proof. §1.1 の polarization identity と同様にして証明できるので，ここでは省略する． □

Theorem 2 (generalized polarization identity (一般化極化等式)). T が複素ヒルベルト空間 H 上の作用素であるとき，任意の $x, y \in H$ について

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}\{(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)\} + \frac{1}{4}i\{(T(x+iy), x+iy) - (T(x-iy), x-iy)\}$$

が成り立つ．

Proof. $f(x, y) = (Tx, y)$ とおくと，f はヒルベルト空間 H 上の bilinear functional であるので，Theorem 1 より Theorem 2 は証明される． □

Theorem 2 の $T = I$ の場合が §1.1 の polarization identity であるので，よって Theorem 2 は §1.1 の polarization identity の拡張であることに注意する．

Theorem 3. T が複素ヒルベルト空間 H 上の作用素であるとき，次の (i)∼(iii) は同値である．

(i) $T = 0$.

(ii) すべての $x \in H$ について $(Tx, x) = 0$.

(iii) すべての $x, y \in H$ について $(Tx, y) = 0$.

Proof. (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). (iii) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかであるので，(ii) $\Longrightarrow$ (iii) を示せばよい．Theorem 2 より，任意の $x, y \in H$ について

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}\{(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)\} + \frac{1}{4}i\{(T(x+iy), x+iy) - (T(x-iy), x-iy)\}$$

が成り立つが，(ii) より右辺は 0 になるので，よって $(Tx, y) = 0$ である．

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii). (i) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかであるので，(iii) $\Longrightarrow$ (i) を示せばよい．(iii) で $y = Tx$ とおくと，任意の $x \in H$ について $\|Tx\|^2 = 0$, すなわち $Tx = 0$ であり，

よって (i) が示された. □

Definition 2. 特別な作用素のタイプを次のように定義する.

self-adjoint(自己共役) 作用素 : $T^* = T$.

normal(正規) 作用素 : $T^*T = TT^*$.

quasinormal 作用素 : $T(T^*T) = (T^*T)T$.

projection(射影) 作用素 : $T^2 = T$ **(idempotent (べき等))** かつ $T^* = T$.

unitary(ユニタリ) 作用素 : $T^*T = TT^* = I$.

isometry(等距離) 作用素 : $T^*T = I$.

positive(正値) 作用素 ($T \geq 0$ と表す) : 任意の $x \in H$ について $(Tx, x) \geq 0$.

hyponormal 作用素 : $T^*T \geq T^*T$,

ただし self-adjoint 作用素 A, B について, $A \geq B$ とは $A - B \geq 0$ のことである.

他の作用素のタイプは後に紹介する.

Theorem 4. T を複素ヒルベルト空間 H 上の作用素とする. このとき次が成り立つ.

(i) T が normal 作用素であるための必要十分条件は, 任意の $x \in H$ について $\|Tx\| = \|T^*x\|$ が成り立つことである.

(ii) T が self-adjoint 作用素であるための必要十分条件は, 任意の $x \in H$ について (Tx, x) が実数であることである.

(iii) T が unitary 作用素であるための必要十分条件は, 任意の $x \in H$ について $\|Tx\| = \|T^*x\| = \|x\|$ が成り立つことである.

(iv) T が hyponormal 作用素であるための必要十分条件は, 任意の $x \in H$ について $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ が成り立つことである.

Proof. (i) 次の (1) を注意しておく.

(1) 任意の $x \in H$ について $\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = ((T^*T - TT^*)x, x)$.

($\Longrightarrow$) T が normal ならば, (1) より任意の $x \in H$ について $\|Tx\| = \|T^*x\|$ である.

($\Longleftarrow$) 任意の $x \in H$ について $\|Tx\| = \|T^*x\|$ が成り立つと仮定する. (1) と Theorem 3 より $T^*T - TT^* = 0$ であり, すなわち T は normal 作用素である.

(ii) ($\Longrightarrow$) T が self-adjoint, すなわち $T^* = T$ とすると, 任意の $x \in H$ について

$$(Tx, x) = (T^*x, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)},$$

よって (Tx, x) は実数である.

($\Longleftarrow$) 任意の $x \in H$ について, (Tx, x) は実数であると仮定する. このとき

$$(Tx, x) = \overline{(Tx, x)} = (x, Tx) = (T^*x, x),$$

よって Theorem 3 より $T - T^* = 0$ であり, すなわち T は self-adjoint 作用素である.

(iii) ($\Longrightarrow$) T が unitary, すなわち $T^*T = TT^* = I$ とすると, 任意の $x \in H$ について

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= (T^*Tx, x)\\ &= (TT^*x, x) = \|T^*x\|^2 = (x, x) = \|x\|^2,\end{aligned}$$

よって $\|Tx\| = \|T^*x\| = \|x\|$ である.

($\Longleftarrow$) 任意の $x \in H$ について, $\|Tx\| = \|T^*x\| = \|x\|$ であると仮定する. このとき

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = \|x\|^2 &\Longleftrightarrow (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) = (x, x)\\ &\Longleftrightarrow ((T^*T - I)x, x) = ((TT^* - I)x, x) = 0,\end{aligned}$$

よって Theorem 3 より $T^*T - I = TT^* - I = 0$ であり, すなわち T は unitary 作用素である.

(iv) (1) より明らかである. □

Corollary 5. T を複素ヒルベルト空間 H 上の作用素とする. このとき次の (i)〜(iii) は同値である.

(i) T は isometry 作用素である.

(ii) 任意の $x \in H$ について $\|Tx\| = \|x\|$.

(iii) 任意の $x, y \in H$ について $(Tx, Ty) = (x, y)$.

Proof. Theorem 4 の証明の中で, すでに示されている. □

Theorem 6 (Cartesian form). 任意の作用素 T について，$T = A+iB$ であるような self-adjoint 作用素 A, B が存在する．必然的に，それぞれ $A = \dfrac{1}{2}(T+T^*)$, $B = \dfrac{1}{2i}(T-T^*)$ である．

Proof. A, B を上記のように定義する．明らかに A, B は self-adjoint であり，$A+iB = T$ である．逆に，self-adjoint 作用素 C, D について $T = C + iD$ であるとすると，$T + T^* = 2C$, $T - T^* = 2iD$ であり，ゆえに $C = A$, $D = B$ である． □

§2.1.4 projection 作用素とその性質

projection 作用素の代数的な定義はすでに述べたが，ここで幾何学的な意味での projection 作用素の別の定義を紹介する．

§1.3 の Theorem 2 より，ヒルベルト空間 H は閉部分空間 M を用いて $H = M \oplus M^\perp$ と分解できる．すなわち，任意の H の元 x は，M の元 y と $M^\perp$ の元 z を用いて $x = y \oplus z$ と表すことができる．ここで $Px = y$ なる H 上の変換 P を考える．この P は M の上への線形作用素であるが，この P を H の M への **orthogonal projection** (直交射影) とよび，P_M で表す．

次の定理は，上で定義した orthogonal projection は，§2.1.3 の Definition 2 による projection 作用素とちょうど一致することを示している．

Theorem 1. P_M をヒルベルト空間 H の閉部分空間 M への orthogonal projection とする．このとき，

$$P_M^* = P_M, \qquad P_M^2 = P_M$$

が成り立つ．逆に，作用素 P が $P^* = P$, $P^2 = P$ を満たすならば，$M = R(P)$ は閉部分空間であり，$P = P_M$，すなわち，P は M への orthogonal projection である．

Proof. ($\Longrightarrow$) 任意の $x_1, x_2 \in H$ について，$x_1 = y_1 \oplus z_1$, $x_2 = y_2 \oplus z_2$ を満たすような $y_1, y_2 \in M$, $z_1, z_2 \in M^\perp$ が存在する．このとき $x_1 + x_2 = (y_1+y_2) \oplus (z_1+z_2)$ であり，$y_1 + y_2 \in M$, $z_1 + z_2 \in M^\perp$ であるので，

$$P_M(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 = P_M x_1 + P_M x_2$$

が成り立つ．任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ について $P_M(\alpha x) = \alpha P_M(x)$ が成り立つことも同様にして示されるので，よって P_M は線形である．また

$$\|P_M x_1\|^2 = \|y_1\|^2 \leq \|y_1\|^2 + \|z_1\|^2 = \|x_1\|^2$$

より P_M は有界である．さらに

$$(P_M x_1, x_2) = (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (x_1, P_M x_2)$$

であるので，§2.1.3 の Theorem 3 より $P_M^* = P_M$ である．また任意の $x \in H$ について $P_M x \in M$ であるので

$$P_M^2 x = P_M(P_M x) = P_M x,$$

よって $P_M^2 = P_M$ が成り立つ．

($\Longleftarrow$) $P^* = P = P^2$ であると仮定する．まず，$M = R(P)$ が H の閉部分空間であることを示す．任意の $x \in \overline{M}$ について，$Px_n \to x$ なる点列 $\{x_n\} \subset H$ が存在する．このとき $P^2 = P$ と P の連続性より $Px_n = P^2 x_n \to Px$ である．よって $x = Px \in M$ であり，$\overline{M} = M$ である．また $P^* = P = P^2$ であることから，任意の $x, y \in H$ について

$$(x - Px, Py) = (x, Py) - (x, P^* Py) = 0,$$

よって

$$x = Px \oplus (I - P)x \qquad Px \in M, \qquad (I - P)x \in M^{\perp}$$

であり，したがって，P は M への orthogonal projection である． □

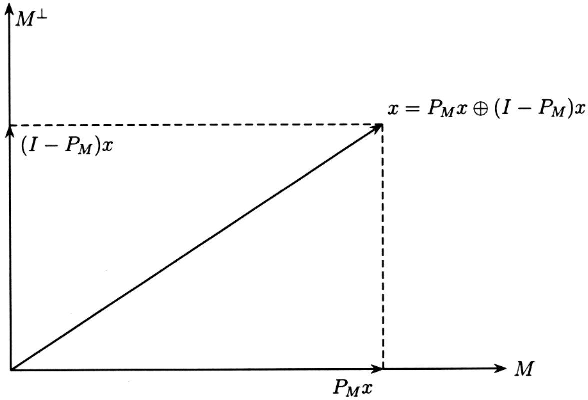


Figure 10 §2.1.4 の Theorem 1 に関するメモ．

Theorem 2. P が projection 作用素のとき，次が成り立つ．

(i) 任意の $x \in H$ について $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2$.

(ii) 任意の $x \in H$ について $(Px, x) = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2$.

(iii) $I \geq P \geq 0$.

Proof. (i) $P^* = P = P^2$ であるので

$$\begin{aligned}\|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2 &= (Px, Px) + ((I-P)x, (I-P)x) \\ &= (P^2x, x) + \|x\|^2 - (x, Px) - (Px, x) + (P^2x, x) \\ &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

(ii), (iii) は (i) より導かれる． □

Theorem 3. M_1, M_2 を H の閉部分空間とし，P_1, P_2 をそれぞれ M_1, M_2 への projection 作用素とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $M_1 \perp M_2 \iff P_1P_2 = 0 \iff P_2P_1 = 0$.

(ii) $M_1 \subset M_2 \iff P_1P_2 = P_1 \iff P_2P_1 = P_1 \iff P_1 \leq P_2$

$\iff$ 任意の $x \in H$ について $\|P_1x\| \leq \|P_2x\|$.

Proof. (i) $M_1 \perp M_2$ ならば，任意の $x \in H$ について $P_2x \in M_2 \subset M_1^\perp$ であるので，$P_1P_2 = 0$ であり，共役作用素を考えることにより $P_2P_1 = 0$ と同値である．$P_2P_1 = 0$ ならば，任意の $x \in M_1$ について $P_2x = P_2P_1x = 0$ であるので，すなわち $x \in M_2^\perp$ であり，よって $M_1 \perp M_2$ である．

(ii) $M_1 \subset M_2$ ならば，任意の $x \in H$ について $P_1x \in M_1 \subset M_2$ であるので，$P_2P_1x = P_1x$ であり，すなわち $P_2P_1 = P_1$ である．さらに共役作用素を考えることにより $P_1P_2 = P_1$ と同値である．

$P_1P_2 = P_1$ と仮定すると，任意の $x \in H$ について

$$\begin{aligned}(P_1x, x) = \|P_1x\|^2 &= \|P_1P_2x\|^2 \\ &\leq \|P_2x\|^2 = (P_2x, x) \quad (\text{Theorem 2 (ii) より}),\end{aligned}$$

よって $P_1 \leq P_2$ である．

$P_1 \leq P_2$ と仮定すると，任意の $x \in H$ について

$$\|P_1x\|^2 = (P_1x, x) \leq (P_2x, x) = \|P_2x\|^2,$$

よって $\|P_1x\| \le \|P_2x\|$ である．

任意の $x \in H$ について $\|P_1x\| \le \|P_2x\|$ と仮定すると，任意の $x_1 \in M_1$ について，Theorem 2 の (i) より

$$\|P_2x_1\|^2 + \|(I-P_2)x_1\|^2 = \|x_1\|^2 = \|P_1x_1\|^2 \le \|P_2x_1\|^2,$$

よって $(I-P_2)x_1 = 0$，すなわち $x_1 = P_2x_1 \in M_2$ であり，ゆえに $M_1 \subset M_2$ である． □

Theorem 4. P_1, P_2 をそれぞれ M_1, M_2 への projection 作用素とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $P = P_1P_2$ が projection 作用素であるための必要十分条件は $P_1P_2 = P_2P_1$ であることである．

(ii) $P_1P_2 = P_2P_1$ ならば，$P = P_1P_2$ は $M_1 \cap M_2$ への projection 作用素である．

Proof. (i) ($\Longrightarrow$) もし $P = P_1P_2$ が projection 作用素ならば $P^* = P$ であり，すなわち $P_1P_2 = P_2P_1$ である．

($\Longleftarrow$) $P_1P_2 = P_2P_1$ であると仮定する．このとき $P^* = P_2P_1 = P_1P_2 = P$ であり，また

$$P^2 = (P_1P_2)(P_1P_2) = P_1^2P_2^2 = P_1P_2 = P,$$

よって $P^* = P = P^2$ であり，すなわち P は projection 作用素である．

(ii) (i) から $P = P_1P_2$ は projection 作用素であることより，P が $M_1 \cap M_2$ への projection であることを示せばよい．任意の $x \in M_1 \cap M_2$ について $x = P_1x = P_2x$，よって $x = P_1P_2x \in R(P_1P_2)$ であり，したがって $M_1 \cap M_2 \subset R(P_1P_2)$ である．逆に

$$R(P_1P_2) = R(P_2P_1) \subset M_1 \cap M_2$$

であるので，よって $R(P_1P_2) = M_1 \cap M_2$ である． □

Theorem 5. P_1, P_2 をそれぞれ M_1, M_2 への projection とし，$P_1P_2 = P_2P_1$ であるとする．このとき $M_1 + M_2$ は閉部分空間であり，$P_1 + P_2 - P_1P_2$ は $M_1 + M_2$ への projection である．

Proof. $P = P_1 + P_2 - P_1P_2$ が projection であることは，P_1, P_2 が projection であり $P_1P_2 = P_2P_1$ であることから明らかである．

次に，任意の $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ について

$$Px_1 = P_1x_1 + P_2x_1 - P_1P_2x_1 = x_1 + P_2x_1 - P_2x_1 = x_1,$$

よって $Px_1 = x_1$ であり，同様にして $Px_2 = x_2$ である．したがって

$$x_1 + x_2 = P(x_1 + x_2) \in R(P),$$

すなわち $M_1 + M_2 \subset R(P)$ である．

逆に $P = P_1 + P_2 - P_1P_2$ であることから，

$$R(P) \subset R(P_1) + R(P_2(I - P_1)) \subset M_1 + M_2,$$

ゆえに $R(P) = M_1 + M_2$ であり，よって Theorem 1 から $M_1 + M_2$ は閉部分空間であり，P は $M_1 + M_2$ への projection である． □

Theorem 6. P_1, P_2 をそれぞれ M_1, M_2 への projection とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $P = P_1 + P_2$ が projection であるための必要十分条件は $M_1 \perp M_2$ であることである．

(ii) $P = P_1 + P_2$ が projection であるならば，P は $M_1 \oplus M_2$ への projection である．

Proof. (i) ($\Longrightarrow$) $P = P_1 + P_2$ が projection ならば $P^2 = P$ であるが，これを書き直すと，$P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$ より

$$P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2 + P_1P_2 + P_2P_1,$$

ゆえに

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 0 \qquad \text{(*1)}$$

である．(*1) に両側から P_2 をかけることにより $2P_2P_1P_2 = 0$, ここで $P_1^2 = P_1$ であることから

$$0 = P_2P_1P_1P_2 = (P_1P_2)^*(P_1P_2),$$

よって $P_1P_2 = 0$ であり，Theorem 3 の (i) より $M_1 \perp M_2$ である．

($\Longleftarrow$) $M_1 \perp M_2$ ならば，Theorem 3 の (i) より $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ であり，よって明らかに $P^2 = P = P^*$ が成り立つので，$P = P_1 + P_2$ は projection である．

(ii) (i) より $P = P_1 + P_2$ が projection ならば $M_1 \perp M_2$ である．よって $M = R(P) = M_1 + M_2$ であることを示せばよい．任意の $x \in H$ について

$$y = Px = P_1x + P_2x.$$

ここで $P_1x \in M_1$, $P_2x \in M_2$ であることから $y \in M_1 \oplus M_2$ であり，よって $M \subset M_1 + M_2$ である．

逆に，任意の $z = x_1 \oplus x_2 \in M_1 \oplus M_2$ について

$$Pz = P_1(x_1 + x_2) + P_2(x_1 + x_2) = P_1x_1 + P_2x_2 = x_1 + x_2 = z,$$

よって $z \in M = R(P)$ であり，したがって $M \supset M_1 \oplus M_2$ である．

以上から $M = M_1 + M_2$ であることが示された． □

§2.1.5　一般化 Schwarz 不等式と正値作用素の平方根

次の 3 つのヒルベルト空間 H 上の作用素の列の収束について紹介する．

Definition 1.

(i) 作用素の列 $\{T_n\}$ について，$n \to \infty$ のとき $\|T_n - T\| \to 0$ であるような作用素 T が存在するとき，$\{T_n\}$ は T に **uniformly operator convergent** (一様作用素収束) するといい，$T_n \Longrightarrow T$ (u) と表す．

(ii) 作用素の列 $\{T_n\}$ について，任意の $x \in H$ について $n \to \infty$ のとき $\|T_nx - Tx\| \to 0$ であるような作用素 T が存在するとき，$\{T_n\}$ は T に **strongly operator convergent** (強作用素収束) するといい，$T_n \Longrightarrow T$ (s) と表す．

(iii) 作用素の列 $\{T_n\}$ について，任意の $x, y \in H$ について $n \to \infty$ のとき $(T_nx, y) - (Tx, y) \to 0$ であるような作用素 T が存在するとき，$\{T_n\}$ は T に **weakly operator convergent** (弱作用素収束) するといい，$T_n \Longrightarrow T$ (w) と表す．

このとき，

$$T_n \Longrightarrow T \text{ (u) ならば } T_n \Longrightarrow T \text{ (s)}, \quad T_n \Longrightarrow T \text{ (s) ならば } T_n \Longrightarrow T \text{ (w)}$$

であることは明らかである．

Definition 2. ヒルベルト空間 H 上の作用素 A について，

$$(A) = \{B : B \text{ は } H \text{ 上の作用素で } AB = BA\}.$$

ここで，任意の自然数 n について $(A^n) \supset (A)$ であるので，よって任意の多項式 $p(t)$ について $(p(A)) \supset (A)$ である．

Definition 3. self-adjoint 作用素の列 $\{A_n\}$ が **bounded monotone increasing** (有界単調増加) であるとは，ある作用素 A が存在して

$$A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A_n \leq \cdots \leq A$$

が成り立つことである．

同様に，self-adjoint 作用素の列 $\{A_n\}$ が **bounded monotone decreasing** (有界単調減少) であるとは，ある作用素 A が存在して

$$A_1 \geq A_2 \geq \cdots \geq A_n \geq \cdots \geq A$$

が成り立つことである．

Theorem 1 (generalized Schwarz inequality (一般化 Schwarz 不等式)). A がヒルベルト空間 H 上の正値作用素であるとき，任意の $x, y \in H$ について

$$|(Ax, y)|^2 \leq (Ax, x)(Ay, y)$$

が成り立つ．

Proof. $[x, y] = (Ax, y)$ とおく．このとき $[x, y]$ は内積の定義の条件のうち，(I1) の "$[x, x] = 0$ ならば $x = 0$" 以外のすべてを満たすので，よって §1.1 の Schwarz の不等式の証明と同様にして

$$\left|[x, y]\right|^2 \leq [x, x][y, y],$$

すなわち，

$$|(Ax, y)|^2 \leq (Ax, x)(Ay, y)$$

が成り立つことが示される．　□

後に §3.8 で，Theorem 1 のさらなる一般化を紹介する．

Theorem 2. self-adjoint 作用素の列 $\{A_n\}$ が有界単調増加であるとき，$\{A_n\}$ はある self-adjoint 作用素 A に強作用素収束する．すなわち，

$$A_n \Longrightarrow A \text{ (s)}$$

である．

Proof. $0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq I$ の場合を示せば十分である．H は完備であるので，任意の $x \in H$ について $m, n \to \infty$ のとき $\|A_n x - A_m x\| \to 0$ であることを示せばよい．$n > m$ について

$$\begin{aligned}\|A_n x - A_m x\|^4 &= ((A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x)^2 \\ &\leq ((A_n - A_m)x, x)((A_n - A_m)(A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Theorem 1 より)} \\ &\leq ((A_n - A_m)x, x)((A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x) \qquad (A_n - A_m \leq I \text{ より}) \\ &= ((A_n - A_m)x, x)\|(A_n - A_m)x\|^2,\end{aligned}$$

よって

$$\|A_n x - A_m x\|^2 \leq ((A_n - A_m)x, x) = (A_n x, x) - (A_m x, x)$$

である．$\{(A_n x, x)\}$ は単調増加であり，上限は (x, x) であることから，よって $m, n \to \infty$ のとき $\|A_n x - A_m x\| \to 0$ である．□

Theorem 3 (square root of positive operators (正値作用素の平方根)). 任意の正値作用素 A について，$S^2 = A$ であるような正値作用素 S がただ一つ存在する ($S = A^{\frac{1}{2}}$ と表す)．また $(S) \supseteq (A)$ が成り立つ．

Proof. **S の存在性の証明**　$0 \leq A \leq I$ の場合を示せば十分である．まず S_k を次のように定義する．

(1)　$$S_0 = 0, \quad S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2}(A - S_k^2).$$

各 S_n は A の多項式で表されるので，よって S_n は self-adjoint 作用素で $(S_n) \supset (A)$ であり，また

(2)　$$0 \leq S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq I$$

である．実際，(1) から

(3)　$$I - S_{k+1} = \frac{1}{2}(I - S_k)^2 + \frac{1}{2}(I - A),$$

よって $I \geq S_{k+1}$ である．また (3) から

$$(4) \qquad S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2}\{(I - S_{k-1}) + (I - S_k)\}(S_k - S_{k-1}),$$

よって $S_{k+1} \geq S_k$ であり，以上から (2) が成り立つ．

(2) から，Theorem 2 より $\{S_k\}$ は S に強作用素収束する．(1) で $k \to \infty$ とすることにより

$$S = S + \frac{1}{2}(A - S^2),$$

すなわち $S^2 = A$ である．$S \geq 0$, $(S) \supset (A)$ は $S_k \geq 0$, $(S_k) \supset (A)$ より明らかであるので，これで証明の前半が終わった．

S の一意性の証明 $j = 1, 2$ について $0 \leq S_j \leq I$ かつ $S_j^2 = A$ であるとする．

$$S_2 A = S_2 S_2 S_2 = A S_2$$

であることから $(S_2) \supset (A)$ であり，よって $S_1 S_2 = S_2 S_1$ である．ゆえに

$$(5) \quad (S_1 + S_2)(S_1 - S_2) = S_1^2 - S_2^2 - S_1 S_2 + S_2 S_1 = 0 \qquad (S_1 S_2 = S_2 S_1 \text{ より}).$$

前半の証明より $R_1^2 = S_1$, $R_2^2 = S_2$ であるような正値作用素 R_1, R_2 が存在する．任意の $x \in H$ について $y = (S_1 - S_2)x$ とおくと

$$\begin{aligned}
\|R_1 y\|^2 + \|R_2 y\|^2 &= (R_1^2 y, y) + (R_2^2 y, y) \\
&= ((S_1 + S_2)y, y) \\
&= ((S_1 + S_2)(S_1 - S_2)x, y) \\
&= 0 \qquad ((5) \text{ より}),
\end{aligned}$$

よって $R_1 y = R_2 y = 0$ であり，したがって

$$S_1 y = R_1^2 y = 0, \qquad S_2 y = R_2^2 y = 0$$

である．ゆえに

$$\|(S_1 - S_2)x\|^2 = ((S_1 - S_2)(S_1 - S_2)x, x) = ((S_1 - S_2)y, x) = 0,$$

よって $S_1 = S_2$ であり，これで後半が証明された．

以上より定理が証明された． □

Corollary 4. $A \geq 0$, $B \geq 0$ について A と B が可換であるとき，

$$AB \geq 0$$

である．

Proof. Theorem 3 より，$S^2 = A$ であり B と可換である $S \geq 0$ が存在するので，よって任意の $x \in H$ について

$$(ABx, x) = (S^2 Bx, x) = (BSx, Sx) \geq 0. \qquad \square$$

§2.1.6 自己共役行列の対角化から self-adjoint 作用素の spectrum 表現へ

便宜上のため，よく知られた自己共役行列の対角化について復習しておく．この結果がヒルベルト空間上の self-adjoint 作用素に対して拡張される．

Theorem 1. 任意の自己共役行列 A は，適当な unitary 行列 U を用いて

$$A = U\Lambda U^*$$

と分解される．ここで Λ は対角行列である．

Proof. A の次数 n についての帰納法を用いて証明する．

(i) $n = 1$ のときは自明である．

(ii) $n-1$ のとき成り立つと仮定する．A の固有値 λ_1 を 1 つ選び，λ_1 に対応する正規化した固有ベクトルを $e_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}$ とする．このとき線形独立な系 $\{e_1, f_2, \ldots, f_n\}$ をとることができて，これに Gram-Schmidt の直交化法を施すことによって正規直交系 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を作ることができる．

ここで

$$P_1 = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

とおくと，明らかに P_1 は unitary であり

$$P_1^* A P_1 = \begin{pmatrix} \overline{p_{11}} & \overline{p_{21}} & \cdots & \overline{p_{n1}} \\ \overline{p_{12}} & \overline{p_{22}} & \cdots & \overline{p_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{p_{1n}} & \overline{p_{2n}} & \cdots & \overline{p_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & *** \\ \lambda_1 p_{21} & *** \\ \vdots & \\ \lambda_1 p_{n1} & *** \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \lambda_1 & *** \\ 0 & *** \\ \vdots & \\ 0 & *** \end{pmatrix}.
$$

ここで $P_1^* A P_1$ が自己共役であることから

$$
P_1^* A P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},
$$

ただし，B は $n-1$ 次の自己共役行列である．帰納法の仮定より，unitary 行列 Q と対角行列 M を用いて $B = QMQ^*$ と表すことができる．

ここで

$$
P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}
$$

とおくと，Q が unitary であることから P_2 もまた unitary であり，また

$$
A = P_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P_1^* = P_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & QMQ^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P_1^*
$$

$$
= P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P_1^*
$$

$$
= P_1 P_2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} (P_1 P_2)^*
$$

となる．$P_1 P_2$ もまた unitary であるので，よって n のときも成り立つことが示された．

以上より定理は証明された． □

Remark 1. Theorem 1 の証明を吟味することにより，A が自己共役行列のとき，A は

(1)
$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

と分解される．ここで $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$ は unitary 行列であり，$j = 1, 2, \dots, n$ について u_j は A の固有値 λ_j に対応する正規化された固有ベクトルである．

(1) は次のように表すことができる．

(2)
$$A = \lambda_1 U \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} U^* + \lambda_2 U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$
$$+ \cdots + \lambda_n U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} U^*.$$

ここで，

$$P_1 = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} U^*, \quad P_2 = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

$$\cdots, \quad P_n = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} U^*$$

とおく．このとき，$P_1, P_2, \ldots, P_n$ は明らかに projection であり，(2) より

(3)
$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j.$$

また，

$$E_1 = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} U^*, \quad E_2 = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

$$\cdots, \quad E_n = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} U^*$$

とおく．このとき，$E_1, E_2, \ldots, E_n$ もまた明らかに projection であり，(3) は次のように書き換えられる．

(4)
$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 (E_2 - E_1) + \cdots + \lambda_n (E_n - E_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Delta E_j,$$

ここで $\Delta E_j = E_j - E_{j-1}$, $E_0 = 0$ である．

現在では，ヒルベルト空間 H 上の self-adjoint 作用素 A について，A は次のように表されることがよく知られている．

(5)
$$A = \int \lambda \, dE_\lambda.$$

ここで $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ は，$\lambda \leq \mu$ のとき

$$E_\lambda \leq E_\mu, \ E_{\lambda+0} = E_\lambda, \ E_{-\infty} = 0 \ \text{かつ} \ E_\infty = I$$

であるような projection 作用素の族である．

ヒルベルト空間上の self-adjoint 作用素は自己共役行列の拡張であるので，(5) は (4) の自然な拡張と考えることができる．

自己共役行列 A	$\longrightarrow$	self-adjoint 作用素 A
$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Delta E_j$	$\longrightarrow$	$A = \int \lambda \, dE_\lambda$
$f(A) = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) \Delta E_j$	$\longrightarrow$	$f(A) = \int f(\lambda) \, dE_\lambda$
	($f(t)$ は連続関数)	

この考察により，次に紹介する結果は自然に理解できるが，ここでは証明は省略する．

Theorem 2. T をヒルベルト空間 H 上の self-adjoint 作用素，$f(t)$ を区間 $[m, M]$ 上の実数値連続関数とする．ただし

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x), \qquad M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x)$$

とする．このとき $f(T)$ は spectrum 表現

$$f(T) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda) \, dE_\lambda$$

をもつ．ここで $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ は，$\lambda \leq \mu$ のとき

$$E_\lambda \leq E_\mu, \quad E_{\lambda+0} = E_\lambda, \quad E_{-\infty} = 0 \ \text{かつ} \ E_\infty = I$$

であるような projection 作用素の族である．

以下，基本的で必須である作用素の性質を準備して，作用素論のもっとも重要で興味深い話題を紹介することにするが，読者は

$$f(A) = \int f(\lambda) \, dE_\lambda \qquad \text{を} \qquad f(A) = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) \Delta E_j$$

に置き換えて理解しても十分に対応できる．

§2.2 partial isometry 作用素と作用素の極分解

§2.2.1 partial isometry 作用素とその特徴づけ

Definition 1. ヒルベルト空間 H 上の作用素 U が

(1) 任意の $x \in H$ について $\|Ux\| = \|x\|$

を満たすとき，U は **isometry** (等距離) **作用素**であるという．このとき，§1.1 の polarization identity より (1) は次の (1′) と同値である．

(1′) 任意の $x, y \in H$ について $(Ux, Uy) = (x, y)$.

また，ヒルベルト空間 H 上の作用素 U が H の上への isometry 作用素であるとき，U は **unitary 作用素**であるという．

Theorem 1.

(i) ヒルベルト空間 H 上の作用素 U が isometry 作用素であるための必要十分条件は $U^*U = I$ であることである．

(ii) ヒルベルト空間 H 上の作用素 U が unitary 作用素であるための必要十分条件は $U^*U = UU^* = I$ であることである．

Proof. (i) U が isometry 作用素ならば，(1′) より，任意の $x \in H$ について

$$(U^*Ux, y) = (Ux, Uy) = (x, y),$$

ゆえに $U^*U = I$ である．逆に $U^*U = I$ ならば，任意の $x \in H$ について

$$\|Ux\|^2 = (U^*Ux, x) = (x, x) = \|x\|^2,$$

よって U は isometry 作用素である．

(ii) U が unitary 作用素，すなわち H の上への isometry 作用素ならば $U^*U = I$ であり，また任意の $x \in H$ について $Uy = x$ であるような $y \in H$ が存在する．ここで $U^*x = U^*Uy = y$ であり

$$\|U^*x\| = \|y\| = \|Uy\| = \|x\|,$$

よって U^* は isometry 作用素であり，$UU^* = (U^*)^*U^* = I$ である．逆に $U^*U = UU^* = I$ ならば U は isometry 作用素であり，また任意の $x \in H$ について $x = UU^*x \in R(U)$ であるので，U は H の上への作用素である．よって U は unitary 作用

素である．□

Definition 2. ヒルベルト空間 H 上の作用素 T の **range** (値域) $R(T)$ は $R(T) = \{Tx : x \in H\}$ で定義され，T の **kernel** (核) $N(T)$ は $N(T) = \{x \in H : Tx = 0\}$ で定義される．

Definition 3. ヒルベルト空間 H 上の作用素 U について，ある閉部分空間 M が存在して，

$$\text{任意の } x \in M \text{ について } \|Ux\| = \|x\|,$$
$$\text{任意の } x \in M^{\perp} \text{ について } \|Ux\| = 0$$

を満たすとき，U は **partial isometry** (部分等距離) **作用素**であるといい，M を U の **initial space** (初期集合)，$N = R(U)$ を U の **final space** (終集合) という．

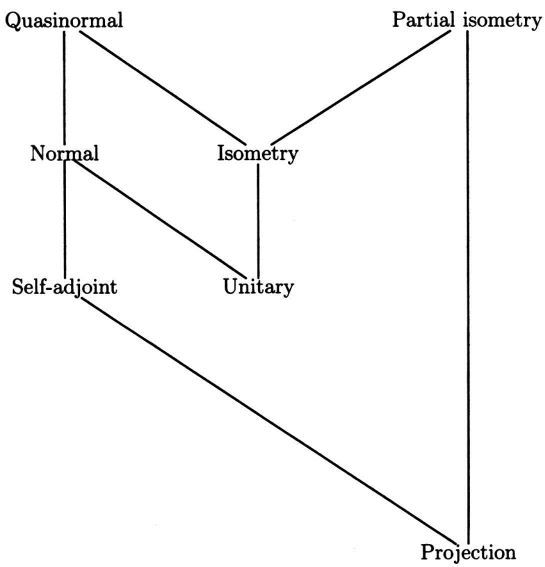


Figure 11　§2.2.1 の Definition 1, Definition 3 に関するメモ

U が isometry 作用素であるための必要十分条件は，U が partial isometry 作用素かつ $M = H$ であり，U が unitary 作用素であるための必要十分条件は，U が partial isometry 作用素かつ $M = N = H$ であることに注意する．

> **Theorem 2.** U を initial space が M，final space が N の partial isometry 作用素とする．このとき次が成り立つ．
> (i) $UP_M = U$, $U^*U = P_M$ である．
> (ii) N は閉部分空間である．
> (iii) U^* は initial space が N，final space が M の partial isometry 作用素であり，$U^*P_N = U^*$, $UU^* = P_N$ である．

Remark 1. partial isometry 作用素 U に対して，U^*U を U の **initial projection** (初期射影), UU^* を U の **final projection** (終射影) という．

Proof. (i) 任意の $x \in H$ について $x = P_M x \oplus z$ なる $z \in M^\perp$ が存在するが，$Uz = 0$ より $Ux = UP_M x \oplus Uz = UP_M x$ であるので，よって $U = UP_M$ である．また $(1')$ より，任意の $x, y \in M$ について $(Ux, Uy) = (x, y)$ であり，任意の $x, y \in H$ について $P_M x, P_M y \in M$ であることから，

$$\begin{aligned}(U^*Ux, y) &= (Ux, Uy) = (UP_M x, UP_M y) \\ &= (P_M x, P_M y) = (P_M x, y),\end{aligned}$$

よって $U^*U = P_M$ である．

(ii) $N = R(U) = UR(P_M) = UM$ より，任意の $x \in \overline{N}$ について $Uy_n \to x$ であるような点列 $\{y_n\} \subset M$ が存在するが，ここで $m, n \to \infty$ のとき

$$\|y_m - y_n\| = \|Uy_m - Uy_n\| \to 0,$$

よって H の完備性から $y_n \to y$ であるような $y \in H$ が存在する．すると $Uy_n \to Uy$ であり，よって $x = Uy \in N$ である．ゆえに $\overline{N} = N$ である．

(iii) 任意の $x \in N$ について $Uy = x$ なる $y \in M$ が存在するが，ここで $\|x\| = \|y\|$, $U^*x = U^*Uy = P_M y = y$ であるので，よって $\|U^*x\| = \|x\|$ である．また任意の $x \in N^\perp$ について，任意の $y \in H$ について $Uy \in N$ であることから，

$$(U^*x, y) = (x, Uy) = 0,$$

よって $U^*x = 0$ であり，したがって U^* は initial space が N，final space が M の

partial isometry 作用素である．final space に関しては

$$R(U^*) = U^*N = U^*R(U) = U^*UH = P_M H = M$$

から得られる．また (i) において U を U^*，M を N に置き換えることにより，$U^*P_N = U^*$, $UU^* = P_N$ が得られる． □

Theorem 3. U をヒルベルト空間 H 上の作用素とする．このとき次は同値である．

(α) U は partial isometry 作用素．

(α^*) U^* は partial isometry 作用素．

(β) $UU^*U = U$.

(β^*) $U^*UU^* = U^*$.

(γ) U^*U は projection 作用素．

(γ^*) UU^* は projection 作用素．

Proof. (α) $\Longrightarrow$ (β). Theorem 2 の (i) より $UU^*U = UP_M = U$ である．

(β) $\Longrightarrow$ (γ). (β) より $U^*UU^*U = U^*U$，よって U^*U は idempotent かつ self-adjoint 作用素であるので，すなわち U^*U は projection 作用素である．

(γ) $\Longrightarrow$ (α). $U^*U = P_M$ とおく．任意の $x \in H$ について

$$\|Ux\|^2 = (U^*Ux, x) = (P_M x, x) = \|P_M x\|^2,$$

よって任意の $x \in M$ について $\|Ux\| = \|x\|$ であり，また任意の $x \in M^\perp$ について $\|Ux\| = 0$ である．よって U は partial isometry 作用素である．

以上から (α), (β), (γ) の同値性が示されたが，同様にして (α^*), (β^*), (γ^*) の同値性が示され，また (β) $\Longleftrightarrow$ (β^*) は両辺の共役作用素をとることにより簡単に示される． □

§2.2.2 作用素の極分解

Theorem 1. M をノルム空間 X の稠密な部分空間とし，T を M からバナッハ空間 Y への有界線形作用素とする．このとき，T を X から Y への有界線形作用素 $\overline{T}$ に拡張することができる．すなわち，任意の $x \in M$ に対して $\overline{T}x = Tx$ が成り立つ．また，このような $\overline{T}$ はただ一つである．さらに $\|\overline{T}\| = \|T\|$ である．

Proof. $\overline{M} = X$ より，任意の $x \in X$ について $x_n \to x$ であるような $\{x_n\} \subset M$ が存在する．$m, n \to \infty$ のとき

$$\|Tx_m - Tx_n\| \leq \|T\|\,\|x_m - x_n\| \to 0$$

であるので，よって $\{Tx_n\} \subset Y$ は Cauchy 列であるが，Y の完備性より収束点 $y_0 \in Y$ が存在する．この y_0 は，x に収束する点列 $\{x_n\}$ の選び方に依存しないことに注意して，X から Y への作用素 $\overline{T}$ を $\overline{T}x = y_0$ により定義する．任意の $x \in M$ について，$x_n = x$ なる点列を選ぶことにより $\overline{T}x = Tx$ を得る．また，$\overline{T}$ の線形性は T の線形性から容易に導かれる．

さらに

$$\|\overline{T}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\|\,\|x_n\| = \|T\|\,\|x\|$$

より $\overline{T}$ は有界であり，$\|\overline{T}\| \leq \|T\|$ である．一方

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in M,\ \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|\overline{T}x\| : x \in M,\ \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|\overline{T}x\| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\} = \|\overline{T}\|,\end{aligned}$$

よって $\|\overline{T}\| = \|T\|$ である．

最後に $\overline{T}$ の一意性を示す．X から Y への有界線形作用素 $\hat{T}$ もまた T の拡張であるとする．任意の $x \in X$ について $x_n \to x$ であるような $\{x_n\} \subset M$ が存在するが，$\hat{T}$ の連続性より

$$\hat{T}x = \lim_{n\to\infty} \hat{T}x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \overline{T}x,$$

よって $\overline{T}$ の一意性が示された． □

Theorem 2. S, T をヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素とする．$T^*T = S^*S$ ならば，initial space が $M = \overline{R(T)}$，final space が $N = \overline{R(S)}$ である partial isometry 作用素 U が存在して，$S = UT$ が成り立つ．

Proof. 仮定 $T^*T = S^*S$ より，任意の $x \in H$ について

$$\|Tx\|^2 = (T^*Tx, x) = (S^*Sx, x) = \|Sx\|^2,$$

よって $Tx_1 = Tx_2$ ならば $Sx_1 = Sx_2$ であるので，$R(T)$ から $R(S)$ への作用素 V を $VTx = Sx$ により定義することができる．ここで $\|VTx\| = \|Sx\| = \|Tx\|$ である．V は明らかに有界線形作用素であり $N = \overline{R(S)}$ はバナッハ空間であることから，Theorem 1 より V を $M = \overline{R(T)}$ から N への作用素 $\overline{V}$ に連続的に拡張することができる．すなわち，任意の $y \in M$ について $y_n \to y$ であるような $y_n \in R(T)$ が存在して，これを用

いて $Vy_n \to \overline{V}y$ と定義するが，このとき，

$$\|\overline{V}y\| = \lim_{n\to\infty} \|Vy_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \|y\|$$

である．H 上の作用素 U を

$$\text{任意の } x \in H \text{ について} \quad Ux = \overline{V}P_M x$$

と定義すると，U は initial space が M の partial isometry 作用素であり，また任意の $x \in H$ について

$$UTx = \overline{V}P_M Tx = \overline{V}Tx = VTx = Sx.$$

さらに $VR(T) = R(S)$ であり，$\overline{V}$ が isometry 作用素であることから，

$$R(U) = \overline{V}M = \overline{R(S)} = N,$$

よって U の final space は N である． □

Theorem 3. T をヒルベルト空間 H 上の任意の作用素とする．このとき partial isometry 作用素 U が存在して

$$T = U|T|$$

が成り立つ．ここで $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ であり，U の initial space, final space をそれぞれ M, N とすると

$$M = \overline{R(|T|)} = \overline{R(T^*)}, \qquad N = \overline{R(T)}$$

である．さらに

$$N(U) = N(|T|), \qquad U^*U|T| = |T|$$

が成り立つ．

Proof. $|T|^2 = T^*T$ から Theorem 2 より initial space が $M = \overline{R(|T|)}$, final space が $N = \overline{R(T)}$ であるような partial isometry 作用素 U が存在して $T = U|T|$ が成り立つ．U が partial isometry 作用素であることから

$$N(U)^\perp = \overline{R(|T|)} = N(|T|)^\perp,$$

よって $N(U) = N(|T|)$ である．また §2.2.1 の Theorem 2 から

$$U^*T = U^*U|T| = P_M|T| = |T|,$$

よって $T^*U = |T|^* = |T|$ であり，$R(|T|) \subset R(T^*)$ である．一方，$|T|U^* = T^*$ より $R(T^*) \subset R(|T|)$ であり，よって $R(|T|) = R(T^*)$ である． □

Remark 1. Theorem 3 の核に関する条件 $N(U) = N(|T|)$ の意味を考える．$N(V) = N(P)$ を満たす partial isometry 作用素 V と正値作用素 P について $T = VP$ が成り立つとする．このとき，この核に関する条件は V と P の一意性を決定する．すなわち $V = U$, $P = |T|$ であり，ここで U, $|T|$ は Theorem 3 で定めるものである．実際，$T = VP$ から $T^* = PV^*$ であるので，ゆえに

$$T^*T = PV^*VP.$$

ここで，V^*V は V の initial space $N(V)^\perp$ への projection 作用素であるが，仮定 $N(V) = N(P)$ より $N(V)^\perp = N(P)^\perp = \overline{R(P)}$, よって $V^*VP = P$ であり，ゆえに $T^*T = P^2$, すなわち $P = |T|$ である．等式 $V|T|x = Tx$ は $\overline{R(|T|)}$ 上での V を決定し，また $x \in N(|T|) = N(V)$ に対して $Vx = 0$ であることから，条件 $N(V) = N(|T|)$ は V もまた一意に定め，よって $V = U$ である．

Definition 1. T をヒルベルト空間 H 上の作用素とする．このとき，$T = U|T|$ であり，さらに条件 $N(U) = N(|T|)$ を満たすとき，$T = U|T|$ を T の **polar decomposition** (極分解) とよび，条件 $N(U) = N(|T|)$ を必ずしも満たさないとき，$T = U|T|$ を単に T の **decomposition** (分解) とよぶ．

Theorem 4. $T = U|T|$ をヒルベルト空間 H 上の作用素 T の極分解とする．このとき次が成り立つ．

(i) $N(|T|) = N(T)$.

(ii) 任意の正数 q について $|T^*|^q = U|T|^q U^*$.

Proof. (i) は次のように証明される．

$$|T|x = 0 \Longleftrightarrow |T|^2 x = 0 \qquad ((|T|^2 x, x) = \||T|x\|^2 = 0 \text{ より})$$

$$\Longleftrightarrow T^*Tx = 0 \Longleftrightarrow Tx = 0 \qquad ((T^*Tx, x) = \|Tx\|^2 = 0 \text{ より}).$$

(ii) 明らかであるが重要な次の関係 (*) に注意する．

(*) 任意の正値作用素 S と正数 q について $N(S^q) = N(S)$.

ここで (*) が $|T|$ について成り立ち，また U^*U が initial projection であることから

$$\overline{R(|T|^q)} = \overline{R(|T|)}, \qquad U^*U|T|^q = |T|^q$$

である．よって

$$|T^*|^2 = TT^* = U|T||T|U^* = U|T|U^*U|T|U^* = (U|T|U^*)^2,$$

ゆえに任意の多項式 $f_n(t)$ について

$$f_n(|T^*|^2) = f_n((U|T|U^*)^2) = Uf_n(|T|^2)U^* \qquad (U^*U|T| = |T| \text{ より}).$$

§2.1.5 の Theorem 3 にあるように，正値作用素 S の平方根 $S^{\frac{1}{2}}$ は S の多項式によって一様に近似されるので，よって $f_n(t) \to t^{\frac{1}{2}}$ ととることにより $|T^*| = U|T|U^*$ が成り立つ．帰納法により，任意の自然数 m, n について $|T^*|^{\frac{n}{m}} = U|T|^{\frac{n}{m}}U^*$ が成り立ち，任意の正数 q について $\dfrac{n}{m} \to q$ とすることにより $|T^*|^q = U|T|^qU^*$, すなわち (ii) が得られる． □

Theorem 5. $T = U|T|$ をヒルベルト空間 H 上の作用素 T の極分解とする．このとき $T^* = U^*|T^*|$ は作用素 T^* の極分解である．

Proof. まず $T = U|T|$ が T の極分解であることから $N(U) = N(|T|)$ が成り立つことに注意する．

$$\begin{aligned} T^* &= |T|U^* \\ &= U^*U|T|U^* \qquad (U^*U|T| = |T| \text{ より}) \\ &= U^*|T^*| \qquad (\text{Theorem 4 から } |T^*| = U|T|U^* \text{ より}), \end{aligned}$$

よって $N(U^*) = N(|T^*|)$ を示せばよい．実際，

$$\begin{aligned} U^*x = 0 &\iff UU^*x = 0 \qquad ((UU^*x, x) = \|U^*x\|^2 = 0 \text{ より}) \\ &\iff |T|U^*x = 0 \qquad (N(U) = N(|T|) \text{ より}) \\ &\iff T^*x = 0 \qquad (T^* = |T|U^* \text{ より}) \\ &\iff |T^*|x = 0 \qquad (T^* \text{ に Theorem 4 (i) を適用することより}). \end{aligned}$$

よって定理は証明された． □

Remark 2. $T = U|T|$ をヒルベルト空間 H 上の作用素 T の極分解，$T^* = V|T^*|$ を T^* の極分解とする．Theorem 5 より，partial isometry 作用素 V は，T の極分解 $T = U|T|$ で使われている U の言葉を用いて $V = U^*$ と一意に表すことができる．

§2.1, 2.2 に関するメモ・注釈・参考文献

S.K.Berberian *Introduction to Hilbert Space*, Chelsea Publishing Company, New York, 1961.

C.L.DeVito *Functional analysis and linear operator theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1990.

N.Dunford and J.T.Schwartz *Linear operators, I, II and III,* Interscience, New York, 1958, 1963 and 1971.

K.E.Gustafson and D.K.M.Rao *Numerical Range*, Springer-Verlag, New York, 1997.

P.R.Halmos

[1] *Introduction to Hilbert space and the theory on spectral multiplicity*, Chelsea, New York, 1951.

[2] *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Litton Educational Publishing, Inc., 1958.

[3] *Hilbert Space Problem Book*, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.

日合文雄・柳研二郎 ヒルベルト空間と線型作用素，牧野書店，1995.

入江昭二 位相解析入門，岩波書店，1957.

E.Kreyszig *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

前田周一郎 函数解析，森北出版，1974.

中村正弘 関数解析入門，槇書店，1968.

J.R.Retherford *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

F.Riesz and B.Sz.Nagy *Functional Analysis*, Ungar, 1955.

竹之内脩 函数解析，朝倉書店，1968.

A.E.Taylor *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.

梅垣壽春 情報数理の基礎，サイエンス社，1993.

T.Yoshino *Introduction to operator theory*, Longman Scientific and Technical, 1993.

K.Yosida *Functional Analysis*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1968.

上のリストに作用素論に関する良書をあげておいたが，初学者のための全般的な参考書を以下にあげておく．[Berberian 1961], [Halmos 1951], [Halmos 1958], [Kreyszig 1989], [Retherford 1993].

§2.3 作用素の極分解とその応用

§2.3.1 invariant subspace と reducing subspace

§2.2.2 の Theorem 3 と Remark 1 でみたように，ヒルベルト空間 H 上の作用素 T は $T = UP$ と分解される．ここで U は partial isometry 作用素，$P = |T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ であり，条件 $N(U) = N(P)$ を満たすものとする．$N(X)$ は作用素 X の核を表す．この核に関する条件 $N(U) = N(P)$ は，極分解 $T = UP$ の U と P を一意に決定する．

Definition 1. 作用素 T が S とも S^* とも可換であるとき，T は S と **doubly commute** するという．

Definition 2. T をヒルベルト空間 H 上の作用素とする．

(i) H の閉部分空間 M が T で **invariant** (不変) である (M は T の **invariant subspace** (不変部分空間) である) とは，$TM \subset M$，すなわち任意の $x \in M$ について $Tx \in M$ であることである．

(ii) H の閉部分空間 M が T を **reduce** する (約する) (M は T の **reducing subspace** である) とは，$TM \subset M$ かつ $TM^\perp \subset M^\perp$，すなわち M と $M^\perp$ の両方が T で invariant であることである．

Theorem 1. T をヒルベルト空間 H 上の作用素，M を H の閉部分空間とする．このとき次の (i)~(iii) は同値である．

(i) $TM \subset M$.

(ii) $T^*M^\perp \subset M^\perp$.

(iii) $TP = PTP$, ここで P は M への projection 作用素である．

Proof. (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) は invariant subspace M の定義から明らかである．

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). T^* と $M^\perp$ に (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) を適用して，

$$\text{(ii) } T^*M^\perp \subset M^\perp \Longleftrightarrow T^*(I-P) = (I-P)T^*(I-P)$$
$$\Longleftrightarrow PT^* = PT^*P \Longleftrightarrow \text{(iii) } TP = PTP. \qquad \square$$

> **Theorem 2.** T をヒルベルト空間 H 上の作用素，M を H の閉部分空間とする．このとき次の (i)∼(v) は同値である．
> (i) M は T を reduce する．
> (ii) $M^{\perp}$ は T を reduce する．
> (iii) M は T^* を reduce する．
> (iv) M は T でも T^* でも invariant である．
> (v) $TP = PT$, ここで P は M への projection 作用素である．

Proof. (i)∼(iv) の同値性は Theorem 1 より容易に導かれる．

(iv) $\Longrightarrow$ (v). Theorem 1 より，

$$\text{(iv) } M \text{ は } T \text{ でも } T^* \text{ でも invariant} \iff TP = PTP \text{ かつ } T^*P = PT^*P$$

であり，$T^*P = PT^*P$ は $PT = PTP$ と同値であるので，よって $PTP = PT = TP$, したがって (v) $TP = PT$ である．

(v) $\Longrightarrow$ (iv). (iv) $TP = PT$ より $TP = PTP$ であり，Theorem 1 より $TM \subset M$ と同値である．また $TP = PT$ は $T^*P = PT^*$ と同値であり，よって $T^*P = PT^*P$ であり，Theorem 1 より $T^*M \subset M$ と同値である．以上から M は T でも T^* でも invariant である． □

§2.3.2 $T_1T_2 = T_2T_1$ かつ $T_1T_2^* = T_2^*T_1$ であるための必要十分条件

> **Theorem 1.** $T = UP$ が作用素 T の極分解であるとき，T とも T^* とも可換な任意の作用素 A について，U と P は A とも A^* とも可換である．

Proof. A を $AT = TA$ かつ $AT^* = T^*A$ であるような作用素とする．このとき $(T^*T)A = A(T^*T)$, すなわち $P^2A = AP^2$ である．ここで $P = |T|$ である．ゆえに $PA = AP$ であり，これは $PA^* = A^*P$ と同値である．条件 $AT - TA = 0$ と $PA = AP$ より

$$AUP - UPA = (AU - UA)P = 0,$$

よって $\overline{R(P)}$ 上で $AU - UA$ は 0 である．

一方，$x \in N(P) = N(U)$ ならば，$Px = 0$ かつ $Ux = 0$ であるので，よって $PAx = APx = 0$ であり，すなわち $Ax \in N(P) = N(U)$ である．ゆえに $UAx = 0$ であり，よって $N(P)$ 上でも $AU - UA$ は 0 である．

以上から

$$H = \overline{R(P)} \oplus N(P) \text{ 上で } \quad AU - UA = 0.$$

同様にして，条件 $AT^* - T^*A = 0$ と $PA = AP$ より

$$APU^* - PU^*A = P(AU^* - U^*A) = 0$$

である．この式の共役作用素をとって $(UA^* - A^*U)P = 0$, よって

(1) $$\overline{R(P)} \text{ 上で } UA^* - A^*U \text{ は } 0$$

である．

一方，$x \in N(P) = N(U)$ ならば，$Px = 0$ かつ $Ux = 0$ であるので，$PA^* = A^*P$ より $PA^*x = A^*Px = 0$ であり，ゆえに $A^*x \in N(P) = N(U)$ であり $UA^*x = 0$ である．したがって

(2) $$N(P) \text{ 上で } UA^* - A^*U \text{ は } 0$$

である．

(1), (2) から $H = \overline{R(P)} \oplus N(P)$ 上で $UA^* - A^*U = 0$ であり，よって定理は証明された． □

次の結果は Theorem 1 の拡張であり，作用素が他の作用素と doubly commute するための必要十分条件を与えている．

Theorem 2. $T_1 = U_1P_1$, $T_2 = U_2P_2$ をそれぞれ T_1, T_2 の極分解とする．このとき次の 3 つの条件は同値である．

(A) T_1 は T_2 と doubly commute する．

(B) U_1^*, U_1, P_1 は U_2^*, U_2, P_2 と可換である．

(C) 次の 5 つの等式が成り立つ．

(C-1) $P_1P_2 = P_2P_1$, (C-2) $U_1P_2 = P_2U_1$, (C-3) $P_1U_2 = U_2P_1$,
(C-4) $U_1U_2 = U_2U_1$, (C-5) $U_1^*U_2 = U_2U_1^*$.

Remark 1. Theorem 2 から次のよく知られた結果が導かれる．Theorem 2 において $U_1^*U_1$, $U_1U_1^*$ は U_2, P_2, T_2 と可換であり，すなわち U_1 の initial space と final space の両方とも U_2, P_2, T_2 を reduce する．同様にして，U_2 の initial space と final space の両方とも U_1, P_1, T_1 を reduce する．

Corollary 3. $T_1 = U_1P_1$, $T_2 = U_2P_2$ をそれぞれ T_1, T_2 の極分解とする．T_1 が T_2 と doubly commute するならば，$T_1T_2 = (U_1U_2)(P_1P_2)$ は T_1T_2 の極分解である．すなわち，U_1U_2 は partial isometry 作用素，$(P_1P_2) = |T_1T_2|$ であり，$N(U_1U_2) = N(P_1P_2)$ を満たす．

Proof. Theorem 2 (C) の (C-4), (C-5) より，

$$
\begin{aligned}
U_1U_2(U_1U_2)^*U_1U_2 &= U_1U_2U_2^*U_1^*U_1U_2 \\
&= U_1U_1^*U_1U_2U_2^*U_2 \\
&= U_1U_2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

上式の最後の等式は U_1, U_2 が partial isometry 作用素であることによる．(3) より U_1U_2 は partial isometry 作用素である．ここで Theorem 2 (C) の (C-1) より，

$$
\begin{aligned}
|T_1T_2|^2 &= (T_1T_2)^*(T_1T_2) \\
&= (T_1^*T_1)(T_2^*T_2) \\
&= P_1^2P_2^2 = (P_1P_2)^2.
\end{aligned}
$$

次に Theorem 2 (C) の (C-2), (C-4) より，

$$
\begin{aligned}
&x \in N(U_2U_1) \iff U_2U_1x = 0 \iff U_1x \in N(U_2) = N(P_2) \\
&\iff P_2U_1x = 0 \iff U_1P_2x = 0 \iff P_2x \in N(U_1) = N(P_1) \\
&\iff P_1P_2x = 0 \iff x \in N(P_1P_2),
\end{aligned}
$$

よって $N(U_2U_1) = N(U_1U_2) = N(P_1P_2)$ であり，以上から定理は証明された． □

Theorem 2 から Theorem 1 より精密な極分解に関する次の結果が導かれる．

Corollary 4 (polar decomposition (極分解)). すべての作用素 T は $T = U|T|$ の形で表される．ここで U は $N(U) = N(|T|)$ であるような partial isometry 作用素である．この核に関する条件は U を一意に定める．また T, T^* と可換である任意の作用素 A について，$U, |T|$ は A の極分解 $A = V|A|$ に表れる V^*, V, $|A|$ と可換である．

Proof. 前半は §2.2.2 の Theorem 3 と Remark 1 より成り立ち，後半は Theorem 2 において $T = T_2$, $A = T_1$ とおくことにより導かれる． □

Theorem 2 から normal 作用素の特徴づけである次の結果が導かれる．

Corollary 5. $T = UP$ が作用素 T の極分解であるとする．このとき T が normal 作用素であるための必要十分条件は，U が P と可換であり，かつ U が $N(T)^{\perp}$ 上で unitary であることである．

Proof. Theorem 2 において $T = T_1 = T_2$ とおくと，Theorem 2 の条件 (A) は T が normal であることと同値であり，条件 (C) は U が P と可換であり $U^*U = UU^*$，すなわち U が U の initial space 上で unitary であることと同値であるが，U の initial space は $N(T)^{\perp}$ と等しい．よって証明された． □

Theorem 2 から次の結果もまた導かれる．

Theorem 6. T を normal 作用素とする．このとき $T = UP = PU$ であるような unitary 作用素 U が存在する．また T, T^* と可換である任意の作用素 A について，U, P は A の極分解 $A = V|A|$ に表れる V^*, V, $|A|$ と可換である．

Proof. $T = U_1P = PU_1$ を normal 作用素 T の極分解とし，$A = V|A|$ を A の極分解とする．Corollary 5 より $U_1^*U_1 = U_1U_1^*$，すなわち U_1 の initial space M と final space N は一致して，よって M は U_1 を reduce する．したがって $U_1P_M = P_MU_1$ である．ここで P_M は M への projection 作用素，すなわち $P_M = U_1^*U_1$ である．ここで $U = U_1P_M + I - P_M$ とおくと，$U_1^*U_1 = U_1U_1^*$, $U_1P_M = P_MU_1$ より

$$U^*U = (P_MU_1^* + I - P_M)(U_1P_M + I - P_M) = I, \tag{4}$$

また

$$UU^* = (U_1P_M + I - P_M)(P_MU_1^* + I - P_M) = I. \tag{5}$$

(4), (5) より U は unitary であるが，この U が目的の unitary 作用素であることは次のように示される．$P_MP = P$，すなわち $PP_M = P$ であることから，

$$\begin{aligned} UP &= (U_1P_M + I - P_M)P \\ &= U_1P_MP + P - P_MP \\ &= U_1P \\ &= T. \end{aligned}$$

同様にして $T = PU = PU_1$ であるので，よって $T = UP = PU$ である．Theorem 2 より P は V^*, V, $|A|$ と可換であるので，よって U が V^*, V, $|A|$ と可換であることを示せばよい．Theorem 2 より U_1 は V^*, V, $|A|$ と可換であるので，よって $P_M = U_1^* U_1$ は V^*, V, $|A|$ と可換であり，すなわち

$$P_M|A| = |A|P_M, \qquad P_M V = V P_M, \qquad P_M V^* = V^* P_M$$

である．簡単な計算により

$$\begin{aligned} VU &= V(U_1 P_M + I - P_M) \\ &= VU_1 P_M + V(I - P_M) \\ &= U_1 V P_M + V(I - P_M) \\ &= (U_1 P_M + I - P_M)V \\ &= UV. \end{aligned}$$

同様にして $V^*U = UV^*$, $|A|U = U|A|$ も得られるので，よって定理は証明された． □

Theorem 6 において U, P は $A = V|A|$ と可換であるので，よって Theorem 6 は次のよく知られた結果を導く．

Theorem 7. すべての normal 作用素 T は $T = UP$ の形で表される．ここで P は正値作用素，また U は unitary にとることができる．U, P は互いに可換であり，また T, T^* と可換なすべての作用素と可換である．

ここで次の有名で有用な結果を紹介する．

Theorem F-P (Fuglede-Putnam (フォグレード–パットナム) の定理). A, B を normal 作用素とする．ある作用素 X について，$AX = XB$ ならば

$$A^*X = XB^*$$

が成り立つ．

Proof (Rosenblum). 次の明らかな結果を確認しておく.

(6) 任意の self-adjoint 作用素 S について e^{iS} は unitary である.

仮定 $AX = XB$ より，任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ について $A^n X = XB^n$ であるので，

(7) 任意の複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ について $e^{i\overline{\lambda}A}X = Xe^{i\overline{\lambda}B}$.

$f(\lambda) = e^{i\lambda A^*}Xe^{-i\lambda B^*}$ とおく．このとき，この関数 $f(\lambda)$ は次のように表される.

(8)
$$\begin{aligned} f(\lambda) &= e^{i\lambda A^*}Xe^{-i\lambda B^*} \\ &= e^{i\lambda A^*}e^{i\overline{\lambda}A}Xe^{-i\overline{\lambda}B}e^{-i\lambda B^*} && ((7) \text{ より } X = e^{i\overline{\lambda}A}Xe^{-i\overline{\lambda}B}) \\ &= e^{i(\lambda A^* + \overline{\lambda}A)}Xe^{-i(\overline{\lambda}B + \lambda B^*)} && (A, B \text{ は normal 作用素であることより}). \end{aligned}$$

ここで，$i(\lambda A^* + \overline{\lambda}A)$, $-i(\overline{\lambda}B + \lambda B^*)$ はともに self-adjoint 作用素であるので，(6) より $e^{i(\lambda A^* + \overline{\lambda}A)}$, $e^{-i(\overline{\lambda}B + \lambda B^*)}$ はともに unitary 作用素である．よって (8) より $f(\lambda) = e^{i\lambda A^*}Xe^{-i\lambda B^*}$ は有界であり，またすべての複素数 λ について解析的である．ゆえに Liouville の定理より $f(\lambda)$ は定数である．すなわち, 任意の λ について $f(\lambda) = f(0) = X$ であり，よって $e^{i\lambda A^*}Xe^{-i\lambda B^*} = X$, したがって $e^{i\lambda A^*}X = Xe^{i\lambda B^*}$ である．この式の両辺を λ に関して微分することにより，目的の $A^*X = XB^*$ が得られる. □

Corollary 8. $T_1 = U_1P_1$ を T_1 の極分解とし，$T_2 = U_2P_2$ を Theorem 6 で述べられている normal 作用素 T_2 の分解であるとする．このとき次の 3 つの条件は同値である.

(A) T_1 は T_2 と可換である.

(B) U_1^*, U_1, P_1 は U_2^*, U_2, P_2 と可換である.

(C) U_1, P_1 は U_2, P_2 と可換である.

Proof. T_2 が normal 作用素であることから, (A) が成り立つならば, Fuglede-Putnam の定理より

$$T_1T_2^* = T_2^*T_1$$

であり，Theorem 6 から U_2, P_2 は U_1^*, U_1, P_1 と可換であり，よって (B) が成り立つ. (C) は (B) から導かれることは自明であり，(A) は (C) から容易に導かれる．よって定理は証明された. □

§2.3.3 非正規作用素の極分解

Theorem 1. $T = UP$ を作用素 T の極分解とし，$N(T) \subset N(T^*)$ であるとする．このとき $T = U_1 P$ であるような isometry 作用素 U_1 が存在する．また T, T^* と可換である任意の作用素 A について，U_1, P は A の極分解 $A = V|A|$ に表れる V^*, V, $|A|$ と可換である．さらに，$N(T) = N(T^*)$ の場合，U_1 は unitary に選ぶことができる．

Proof. 条件 $N(T) \subset N(T^*)$ より $N(T)^\perp \supset N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$, よって U は initial space $M = N(T)^\perp$ から M の中への partial isometry 作用素であり，ゆえに M は U を reduce する．したがって $UP_M = P_M U$ である．ここで P_M は M への projection 作用素，つまり $P_M = U^*U$ である．ここで $U_1 = UP_M + I - P_M$ とおく．§2.3.2 の Theorem 6 の証明と同様にして，

$$U_1^* U_1 = I, \qquad U_1 P = UP = T$$

であり，Theorem 1 にある可換性もまた容易に示される．$N(T) = N(T^*)$ ならば U は M 上で unitary であるので，よって $U_1 U_1^* = I$ であり，上で定義した U_1 は unitary であることがわかる． □

Remark 1. T が可逆または hyponormal ならば $N(T) \subset N(T^*)$ を満たすので，よって Theorem 1 はこれらの作用素について成り立つ．

Corollary 2. T を quasinormal 作用素とする．このとき $T = UP = PU$ であるような isometry 作用素 U が存在する．また T, T^* と可換である任意の作用素 A について，U, P は A の極分解 $A = V|A|$ に表れる $V^*, V, |A|$ と可換である．

Proof. T が quasinormal 作用素ならば T は hyponormal であるので，よって T は $N(T) \subset N(T^*)$ を満たす．T が quasinormal であることから T は T^*T と可換であるので，よって $P = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ は T, T^* と可換である．Theorem 1 において $A = P$ とおけば，Theorem 1 で選ばれた isometry 作用素 U は P と可換である．残りの部分も Theorem 1 より導かれる． □

Remark 2. §2.3.2 の Theorem 6 は，Theorem 1 と Corollary 2 から導くことができる．

Theorem 3. $T = U|T|$ を作用素 T の極分解とする．T が quasinormal であるための必要十分条件は $U|T| = |T|U$ である．

Proof. ($\Longleftarrow$) $U|T| = |T|U$ であるとすると

$$T(T^*T) - (T^*T)T = U|T||T|^2 - |T|^2U|T| = 0$$

であるので，よって T は quasinormal である．

($\Longrightarrow$) T が quasinormal ならば

$$\begin{aligned} 0 = T(T^*T) - (T^*T)T &= U|T||T|^2 - |T|^2U|T| \\ &= (U|T|^2 - |T|^2U)|T|. \end{aligned}$$

作用素の連続性より，この式は $U|T|^2 - |T|^2U$ が $\overline{R(|T|)}$ 上で 0 であることを意味している．$N(U) = N(|T|)$ より $U|T|^2 - |T|^2U$ は $N(|T|)$ 上でもまた 0 であるので，よって $U|T|^2 - |T|^2U$ は $H = \overline{R(|T|)} \oplus N(|T|)$ 上で 0 であり，すなわち $U|T|^2 = |T|^2U$ である．$|T|$ は $|T|^2$ の定数項のない多項式による一様近似であるので，したがって $U|T| = |T|U$ である． □

Remark 3. Corollary 2 と Theorem 3 の違いについて注意する．すなわち，Theorem 3 における $T = U|T|$ は T の極分解であるが，Corollary 2 における $T = UP$ は単に T の分解である．

§2.3.4 $T_1T_2 = T_2T_3$ かつ $T_1^*T_2 = T_2T_3^*$ であるための必要十分条件

§2.3.2 の Theorem 2 から，Fuglede-Putnam の定理と密接な関連がある次の結果が導かれる．

Theorem 1. $k = 1, 2, 3$ について，$T_k = U_kP_k$ を T_k の極分解とする．このとき次の 2 つの条件は同値である．

(A) $T_1T_2 = T_2T_3$, $T_1^*T_2 = T_2T_3^*$.

(B) (B-1) $P_3P_2 = P_2P_3$, (B-2) $U_3P_2 = P_2U_3$, (B-3) $P_1U_2 = U_2P_3$, (B-4) $U_1U_2 = U_2U_3$, (B-5) $U_1^*U_2 = U_2U_3^*$.

Proof. $H \oplus H$ 上の作用素 $\hat{A}$, $\hat{T}$ を次のように定義する．

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\hat{A} = \hat{U}_1\hat{P}_1$, $\hat{T} = \hat{U}_2\hat{P}_2$ をそれぞれ $\hat{A}$, $\hat{T}$ の極分解とすると，$H \oplus H$ 上の作用素 $\hat{U}_1$, $\hat{P}_1$, $\hat{U}_2$, $\hat{P}_2$ は

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_1 = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & U_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

のようになる．

条件 (A) は $\hat{A}\hat{T} = \hat{T}\hat{A}$ かつ $\hat{A}^*\hat{T} = \hat{T}\hat{A}^*$ と同値であり，§2.3.2 の Theorem 2 より，これは $\hat{U}_1^*, \hat{U}_1, \hat{P}_1$ が $\hat{U}_2, \hat{P}_2$ と可換であることと同値であるが，ここで簡単な計算により，

$$\text{(B-1)} \Longleftrightarrow \hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_2\hat{P}_1 \Longleftrightarrow \text{(C-1)},$$

$$\text{(B-2)} \Longleftrightarrow \hat{U}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_2\hat{U}_1 \Longleftrightarrow \text{(C-2)},$$

$$\text{(B-3)} \Longleftrightarrow \hat{P}_1\hat{U}_2 = \hat{U}_2\hat{P}_1 \Longleftrightarrow \text{(C-3)},$$

$$\text{(B-4)} \Longleftrightarrow \hat{U}_1\hat{U}_2 = \hat{U}_2\hat{U}_1 \Longleftrightarrow \text{(C-4)},$$

$$\text{(B-5)} \Longleftrightarrow \hat{U}_1^*\hat{U}_2 = \hat{U}_2\hat{U}_1^* \Longleftrightarrow \text{(C-5)}$$

となる．よって定理は証明された． □

§2.3.2 の Corollary 8 のテクニックと Theorem 1 を組み合わせることによって，次の結果が得られる．証明は同様であるので省略する．

Corollary 2. $T_1 = U_1P_1, T_3 = U_3P_3$ を §2.3.2 の Theorem 6 で述べられている normal 作用素 T_1, T_3 の分解とし，$T_2 = U_2P_2$ を作用素 T_2 の極分解とする．このとき次の 3 つの条件は同値である．

(A) $T_1T_2 = T_2T_3$.

(B) Theorem 1 の (B-1), (B-2), (B-3), (B-4), (B-5) が成り立つ．

(C) Theorem 1 の (B-1), (B-2), (B-3), (B-4) が成り立つ．

Definition 1. $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ をある T, T^* の多項式の族とする．T の性質 Σ が $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ に伴う **algebraic definite** (または **algebraic semidefinite**) であるとは，T が性質 Σ を満たすことと，すべての $\alpha \in J$ について $p_\alpha(T, T^*) = 0$ (または $p_\alpha(T, T^*) \geq 0$) が成り立つことが同値であることである．

Definition 2. ヒルベルト空間 H_1, H_2 上の作用素 T_1, T_2 について，ある H_1 から H_2 への unitary 作用素 (等距離同型写像) U が存在して $T_2 = UT_1U^*$ が成り立つとき，T_1 と T_2 は **unitary equivalent** (ユニタリ同値) であるという．

Lemma 1. ヒルベルト空間 H_1, H_2 上の互いに unitary equivalent な作用素 T_1, T_2 について，T_1 が $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ に伴う algebraic definite (または algebraic semidefinite) な性質 Σ をもつならば，T_2 もまたその性質 Σ をもつ．

Proof. すべての $\alpha \in J$ について，$p_\alpha(T_1, T_1^*) = 0$ (または ≥ 0) であることから，

$$\begin{aligned} p_\alpha(T_2, T_2^*) &= p_\alpha(UT_1U^*, UT_1^*U^*) \\ &= Up_\alpha(T_1, T_1^*)U^* = 0 \quad (\text{または} \geq 0), \end{aligned}$$

よって T_2 も性質 Σ をもつ． □

次に Theorem 1 の応用を紹介する．

Corollary 3. $k = 1, 2, 3$ について，$T_k = U_kP_k$ を T_k の極分解とし，$T_1T_2 = T_2T_3$, $T_1^*T_2 = T_2T_3^*$ であるとする．このとき，

(1) $\overline{R(T_2)}$ は U_1, P_1, T_1 を reduce し，$N(T_2)$ は U_3, P_3, T_3 を reduce する．

(2) $U_1|\overline{R(T_2)}$ (または $P_1|\overline{R(T_2)}$, $T_1|\overline{R(T_2)}$) は $U_3|N(T_2)^\perp$ (または $P_3|N(T_2)^\perp$, $T_3|N(T_2)^\perp$) と unitary equivalent である．

(3) T_2 が稠密な値域をもつとき，U_3 (または P_3, T_3) がある多項式族 $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ に伴う algebraic definite な性質 Σ をもつならば，U_1 (または P_1, T_1) もまたその性質をもつ．

(4) T_2 が単射であるとき，U_1 (または P_1, T_1) がある多項式族 $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ に伴う algebraic definite な性質 Σ をもつならば，U_3 (または P_3, T_3) もまたその性質をもつ．

Proof. (1) Theorem 1 の (B-5), (B-4), (B-3) より

$$(U_2U_2^*)U_1 = U_2U_3U_2^* = U_1(U_2U_2^*),$$

また

$$(U_2U_2^*)P_1 = U_2P_3U_2^* = P_1(U_2U_2^*).$$

よって $\overline{R(T_2)}$ は U_1, P_1, T_1 を reduce する．さらに, Theorem 1 の (B-4), (B-5), (B-3) より

$$(U_2^*U_2)U_3 = U_2^*U_1U_2 = U_3(U_2^*U_2),$$

また

$$(U_2^*U_2)P_3 = U_2^*P_1U_2 = P_3(U_2^*U_2).$$

よって $N(T_2)$ は U_3, P_3, T_3 を reduce する．

(2) Theorem 1 の (B-3), (B-1) より

(i) 任意の $x \in H$ について $P_1U_2P_2x = U_2P_3P_2x = U_2P_2P_3x.$

ここで $P_1' = P_1|\overline{R(T_2)}$, $P_3' = P_3|N(T_2)^\perp$ とする．$N(T_2)^\perp$ から $\overline{R(T_2)}$ への作用素 V を，すべての $y \in N(T_2)^\perp$ について $Vy = U_2y$ によって定義すると，この V は

$$N(T_2)^\perp = N(P_2)^\perp = N(U_2)^\perp$$

から

$$\overline{R(T_2)} = N(T_2^*)^\perp = N(U_2^*)^\perp = \overline{R(U_2)}$$

への作用素であるから，よって V は全射かつ等距離，すなわち V は unitary である．P_2x, P_2P_3x は $N(T_2)^\perp$ に属し，U_2P_2x は $\overline{R(T_2)}$ に属するので，(i) より

$$\text{任意の } y \in N(T_2)^\perp \text{ について} \quad P_1'Vy = VP_3'y.$$

よって P_1' は P_3' と unitary equivalent である．同様にして，Theorem 1 の (B-4), (B-2) より

(ii) 任意の $x \in H$ について $U_1U_2P_2x = U_2U_3P_2x = U_2P_2U_3x.$

ここで $U_1' = U_1|\overline{R(T_2)}$, $U_3' = U_3|N(T_2)^\perp$ とする．P_2x, P_2U_3x は $N(T_2)^\perp$ に属し，U_2P_2x は $\overline{R(T_2)}$ に属するので，(ii) より

$$\text{任意の } y \in N(T_2)^\perp \text{ について} \quad U_1'Vy = VU_3'y,$$

よって U_1' は U_3' と unitary equivalent である．T_1' が T_3' と unitary equivalent であることは，上述の 2 つの unitary equivalent な関係から導かれる．

(3) T_2 が稠密な値域をもつとき，(2) より $U_1|\overline{R(T_2)} = U_1$ は $U_3' = U_3|N(T_2)^\perp$ と unitary equivalent である．U_3 がある algebraic definite な性質をもつならば U_3' もまたその性質をもつので，よって Lemma 1 より，U_1 もまたその性質をもつ．残りも同

様である．

(4) T_2 が単射であるとき，(2) より $U_3|N(T_2)^{\perp} = U_3$ は $U_1' = U_1|\overline{R(T_2)}$ と unitary equivalent であるので，(3) と同様にして証明される． □

Corollary 3 の (3), (4) における algebraic definite な性質は，algebraic semidefinite な性質に置き換えても成立することを注意しておく．

§2.3.5 作用素の極分解に関する遺伝の法則

任意の作用素 A, B について，$[A, B]$ は A, B の **commutator** (交換子) を表すものとする．すなわち

$$[A, B] = AB - BA$$

である．

Definition 1. 作用素 T が $[T^*T, TT^*] = 0$ を満たすとき, T は **binormal** であるという．

いうまでもないことだが，すべての quasinormal 作用素は binormal である．

Definition 2. 作用素 U が $U^*U = UU^* = U^2 = I$, すなわち $U^* = U$ かつ U が unitary であるとき，U は **symmetry** であるという．

$T = U|T|$ を作用素 T の極分解とする．T が可逆ならば, U は可逆な partial isometry 作用素であり，すなわち U は unitary である．本節では，極分解 $T = U|T|$ において，T に関するある性質が U に関する同じ性質にどのようにうつるのかを説明する．

Theorem 1. $T = U|T|$ を作用素 T の極分解とする．$T^2 = 0$ (**nilpotent** (べき零)) が成り立つための必要十分条件は $U^2 = 0$ が成り立つことである．

Proof. 証明は次の簡単な関係から導かれる.

$$
\begin{aligned}
&0 = T^2 = U|T|U|T| \\
&\Longleftrightarrow |T|^2U|T| = 0 \qquad (N(U) = N(|T|) \text{ より}) \\
&\Longleftrightarrow |T|U|T| = 0 \qquad (|T| \text{ が正値作用素であることより}) \\
&\Longleftrightarrow U^2|T| = 0 \qquad (N(U) = N(|T|) \text{ より}) \\
&\Longleftrightarrow |T|U^{*2} = 0 \qquad (\text{共役作用素をとることより}) \\
&\Longleftrightarrow UU^{*2} = 0 \qquad (N(U) = N(|T|) \text{ より}) \\
&\Longleftrightarrow (UU^{*2})^*UU^{*2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow U^2U^{*2} = 0 \qquad (U = UU^*U \text{ より}) \\
&\Longleftrightarrow U^2 = 0
\end{aligned}
$$

よって定理は証明された. □

Theorem 1 に関する反例. $T^3 = 0$ であっても $U^3 \neq 0$ であるような次のような例が存在する. T として

$$
T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

をとる. $T = U|T|$ を作用素 T の極分解とすると, U, $|T|$ は次のようになる.

$$
U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad |T| = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

よって $T^3 = 0$ (3-nilpotent) であるが $U^3 \neq 0$ である. この例は Theorem 1 は 3-nilpotent 作用素に拡張することはできないことを示している. □

Theorem 2. $T = U|T|$ を作用素 T の極分解とする. このとき

(1) T が binormal ならば, U もまた binormal である.

(2) T が quasinormal ならば, U もまた quasinormal であり, $N(T)^\perp \oplus N(T)$ 上で $U = \text{isometry} \oplus 0$ である.

(3) T が normal ならば, U もまた normal であり, $N(T)^\perp \oplus N(T)$ 上

で $U = \text{unitary} \oplus 0$ である.

(4) T がself-adjointならば, U もまたself-adjointであり, $N(T)^\perp \oplus N(T)$ 上で $U = \text{symmetry} \oplus 0$ である.

(5) T が正値ならば, U もまた正値であり, $U = \text{projection}$ である.

Proof. U^*U は U の initial projection であり

$$N(U^*U) = N(U) = N(|T|^2)$$

であることから, $T^*T = |T|^2 = (U^*U)|T|^2$ は T^*T の極分解であることを確認しておく. 同様に, UU^* は U の final projection であり

$$N(UU^*) = N(U^*) = N(|T^*|^2)$$

であることから, $TT^* = |T^*|^2 = (UU^*)|T^*|^2$ は TT^* の極分解である.

(1) 仮定 $[T^*T, TT^*] = 0$ は $(U^*U)|T|^2$ と $(UU^*)|T^*|^2$ が doubly commute することと同値であるので, よって §2.3.2 の Theorem 2 の (C-4) より $[U^*U, UU^*] = 0$, すなわち U もまた binormal である.

(2) $T^*T = |T|^2 = (U^*U)|T|^2$ は T^*T の極分解であることより, 仮定 $[T, T^*T] = 0$ は $U|T|$ と $U^*U|T|^2$ が doubly commute することと同値であるので, よって §2.3.2 の Theorem 2 の (C-4) より $[U, U^*U] = 0$, すなわち U もまた quasinormal である. U は $N(U)^\perp = N(T)^\perp$ で reduce されるので, よって $N(T)^\perp \oplus N(T)$ 上で $U = \text{isometry} \oplus 0$ である.

(3) $T^* = U^*|T^*|$ は T^* の極分解であることより, 仮定 $[T, T^*] = [U|T|, U^*|T^*|] = 0$ は $U|T|$ と $U^*|T^*|$ が doubly commute することと同値であるので, よって §2.3.2 の Theorem 2 の (C-4) より $[U, U^*] = 0$, すなわち U もまた normal である. initial space U^*U と final space UU^* が一致するので, よって $N(T)^\perp \oplus N(T)$ 上で $U = \text{unitary} \oplus 0$ である.

(4) T が self-adjoint であることから $U|T| = T = T^* = U^*|T^*|$ であり, T の極分解の一意性 (§2.2.2 の Remark 1) から $U = U^*$ である. この結果と (3) を組み合わせることにより, $N(T)^\perp \oplus N(T)$ 上で $U = \text{symmetry} \oplus 0$ である.

(5) U^*U は U の initial projection であり $N(U^*U) = N(U) = N(|T|)$ であることから, $|T| = U^*U|T|$ もまた $|T|$ の極分解である. T が正であることから

$$U|T| = T = |T| = U^*U|T|$$

であり, T の極分解の一意性から $U = U^*U$ であり, すなわち U は projection 作用素である.

以上より定理は証明された. □

Remark 1. $T = U|T|$ を作用素 T の極分解とする．Theorem 1，Theorem 2 は，T がある性質をもつとき U もまた同じ性質をもつことを示している．よって Theorem 1，Theorem 2 は作用素の極分解における「遺伝の法則」(**hereditary property**) とよぶべきものであろう．

§2.3 に関するメモ・注釈・参考文献

S.K.Berberian *Note on a theorem of Fuglede and Putnam*, Proc. Amer. Math. Soc., **10**(1959), 175–182.

B.Fuglede *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36** (1950), 35–40.

M.Fujii and R.Nakamoto *Intertwining algebraic definite operators*, Math. Japon., **25**(1980), 239–240.

T.Furuta

[1] *On the polar decomposition of an operator*, Act Sci. Math. (Szeged), **46**(1983), 261–268.

[2] *A characterization of 2-nilpotent operatorsand hereditary property on the polar decomposition of an operator*, Tensor(N.S.) **46**(1987), 95–98.

P.R.Halmos *Hilbert Space Problem Book*, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.

R.L.Moore, D.D.Rogers and T.Trent *A note on intertwining M-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **83**(1981), 514–516.

C.R.Putnam *On normal operators in Hilbert space*, Amer. J. Math., **73**(1951), 357–362.

F.Riesz and B.Sz.Nagy *Functional Analysis*, Ungar, 1955.

M.Rosenblum *On a theorem of Fuglede and Putnam*, J. London Math. Soc., **33**(1958), 376–377.

K.Takahashi *On the converse of the Fuglede-Putnam theorem*, Acta Sci. Math. (Szeged), **43**(1981), 123–125.

§2.3 の標準的な教科書として [F.Riesz-B.Sz.Nagy 1952] [Halmos 1967] をあげておく．

§2.3.2 の Corollary 4 はよく知られた結果であるが，ここでは [Halmos 1967] をあげておく．Theorem F-P(Fuglede-Putnam の定理) は大変有名であり，作用素論において非常に有効な結果である．実際，Fuglede-Putnam の定理は，[Fuglede 1950] によって $A = B$ の場合について証明され，[Putnam 1951] によって一般の場合について証明された．作用素行列によるすばらしい証明が [Berberian 1959] によって与えられ

ており，本項にあげた簡潔で美しい証明は [Rosenblum 1958] によるものである．

読者に便利なように，[Berberian 1959] による作用素行列に基づいた次の結果を紹介する．

Remark 1 (Berberian). A, B をヒルベルト空間上の normal 作用素，X をヒルベルト空間上の作用素とする．このとき次の (i), (ii) が成り立ち，一方から他方を互いに導くことができる．

(i) (**Fuglede**)　$AX = XA$ が成り立つならば，$A^*X = XA^*$ が成り立つ．

(ii) (**Putnam**)　$AX = XB$ が成り立つならば，$A^*X = XB^*$ が成り立つ．

Proof. (i) は [Fuglede 1950] によって証明されており，(ii) もまた [Putnam 1951] によって証明されている．ここでは (i) と (ii) の同値性を，Berberian による魔法の証明によって示す．

(i) $\Longrightarrow$ (ii). $AX = XB$ が成り立つと仮定する．

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．A, B の両方とも normal であることより $\hat{A}$ は normal であり，また

$$\hat{A}\hat{X} - \hat{X}\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & AX - XB \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (AX = XB \text{ より}),$$

よって (i) より

$$0 = \hat{A}^*\hat{X} - \hat{X}\hat{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & A^*X - XB^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ゆえに $A^*X = XB^*$ が成り立つ．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). (ii) において $A = B$ とおけばよい．　□

この Berberian の作用素行列による方法は非常に有用であり，実際，§2.3.4 の結果はこの方法を応用することにより得られている．§2.3.4 にある Definition 1 は [Fujii-Nakamoto 1980] に，Theorem 1 は [Furuta 1983] に紹介されている．§2.3.4 の Corollary 3 に関連するいくつかの興味深い結果が [Fujii-Nakamoto 1980], [Moore-Rogers-Trent 1981], [Takahashi 1981] に述べられている．

§2.3.5 の結果は [Furuta 1987] によるものである．

§2.4 作用素の spectrum

§2.4.1 spectrum の二通りの分類

特に断りのない場合は，ヒルベルト空間上の有界線形作用素のことを単に作用素と記す．

Definition 1. 任意の $x \in H$ に対して $Ix = x$ であるとき，I は **identity operator** (恒等作用素) であるという．また，$T \in B(H)$ に対して $ST = TS = I$ なる有界線形作用素 S が存在するならば，このとき作用素 T は **invertible** (可逆) であるといい，$S = T^{-1}$ とかく．また，T^{-1} を T の **inverse** (逆) という．

Theorem 1. $T \in B(H)$，定数 $c > 0$ とする．任意の $x \in H$ に対して $\|Tx\| \geq c\|x\|$ ならば，値域 $R(T)$ は閉集合である．

Proof. $y_n = Tx_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \to y_0 \in \overline{R(T)}$ とする．

$$\|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq c\|x_n - x_m\|$$

と，$\{y_n\}$ が Cauchy 列であることより，$\{x_n\}$ は Cauchy 列となる．また，このとき H の完備性より $x_n \to x_0$ となるような $x_0 \in H$ が存在する．よって，

$$\begin{aligned}\|y_0 - Tx_0\| &\leq \|y_0 - Tx_n\| + \|Tx_n - Tx_0\| \\ &\leq \|y_0 - y_n\| + \|T\|\,\|x_n - x_0\| \to 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

より $y_0 = Tx_0 \in R(T)$ なので，$R(T)$ は閉集合である． □

Theorem 2. $T \in B(H)$ が可逆であることと次の (i), (ii) がともに成り立つことは同値である．

(i) 任意の $x \in H$ に対して $\|Tx\| \geq c\|x\|$ となるような $c > 0$ が存在する．

(ii) 値域 $R(T)$ は H で稠密 (dense), すなわち $\overline{R(T)} = H$ である．

Proof. T は可逆であるとする．このとき，任意の $y \in H$ に対して，$x = T^{-1}y$，すなわち $Tx = y$ となる $x \in H$ が存在する．よって，$R(T) = H$ なので (ii) が成り立つ．

また，

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \le \|T^{-1}\|\,\|Tx\|$$

より，$c = \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$ とすれば (i) が成り立つ．

逆に，(i) と (ii) が成り立つと仮定する．このとき，Theorem 1 と (ii) より $R(T) = \overline{R(T)} = H$ である．また，$x_1, x_2 \in H$ に対して $Tx_1 = Tx_2$ ならば，

$$0 = \|Tx_1 - Tx_2\| \ge c\|x_1 - x_2\|$$

より $x_1 = x_2$ である．ゆえに，任意の $y \in H$ に対して $y = Tx$ となるような $x \in H$ が一意に存在し，$x = Sy$ なる変換 $S : H \to H$ が存在する．このとき，S は線形であり $ST = TS = I$, また，$\|y\| = \|Tx\| \ge c\|x\| = c\|Sy\|$ より $\|S\| \le \dfrac{1}{c}$ なので，$S = T^{-1}$ である． □

Corollary 3. ある $c > 0$ に対して $T \ge cI$ ならば，T は可逆である．

Proof. Schwarz の不等式より

$$\|Tx\|\,\|x\| \ge (Tx, x) \ge c\|x\|^2$$

なので，$\|Tx\| \ge c\|x\|$ である．また，y を $R(T)$ と直交するようにとると，任意の $x \in H$ に対して

$$0 = (y, Tx) = (Ty, x)$$

より $Ty = 0$. このとき，

$$0 = (Ty, y) \ge c\|y\|^2$$

より $y = 0$ である．よって $\overline{R(T)} = H$. ゆえに，Theorem 2 より T は可逆である． □

Definition 2. $T \in B(H)$ に対して，

(1) $$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ T - \lambda \text{ は可逆でない}\}$$

を T の **spectrum** (スペクトル) という．また，

(2) $$\rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T)$$

を T の **resolvent** (レゾルベント) という．

また，Theorem 2 における議論より，$\sigma(T)$ は次の三種類 (3)~(5) に分類できることがわかる．ただし，ここで $(T - \lambda)^{-1}$ とは単に $T - \lambda$ の逆写

像 $\big((T-\lambda)^{-1} : R(T-\lambda) \to H\big)$ を表すものとする.

(3)　　$P_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ Tx = \lambda x$ なる $x \neq 0$ が存在する $\}$.

$P_\sigma(T)$ を T の **point spectrum** (点スペクトル) という.

(4)　$C_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (T-\lambda)^{-1}$ は非有界かつ $\overline{R(T-\lambda)} = H\}$.

$C_\sigma(T)$ を T の **continuous spectrum** (連続スペクトル) という.

(5)　　$R_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (T-\lambda)^{-1}$ が存在し, $\overline{R(T-\lambda)} \subsetneqq H\}$.

$R_\sigma(T)$ を T の **residual spectrum** (剰余スペクトル) という.

次の表は, $P_\sigma(T)$, $C_\sigma(T)$, $R_\sigma(T)$ の関係を表したものである.

- (a) $(T-\lambda)^{-1}$ が存在しない $\iff \lambda \in P_\sigma(T)$
- (b) $(T-\lambda)^{-1}$ が存在する
  - (b_1) $(T-\lambda)^{-1}$ は有界
    - (b_{11}) $\overline{R(T-\lambda)} = H \iff \lambda \in \rho(T)$
    - (b_{12}) $\overline{R(T-\lambda)} \subsetneqq H \iff \lambda \in R_\sigma(T)$
  - (b_2) $(T-\lambda)^{-1}$ は非有界
    - (b_{21}) $\overline{R(T-\lambda)} = H \iff \lambda \in C_\sigma(T)$
    - (b_{22}) $\overline{R(T-\lambda)} \subsetneqq H \iff \lambda \in R_\sigma(T)$

Remark 1. この表より, $P_\sigma(T)$, $C_\sigma(T)$, $R_\sigma(T)$ は disjoint (互いに素) であることがわかる. また, (b_{11}) が $\rho(T)$ であることは Theorem 2 よりわかる. また, residual spectrum $R_\sigma(T)$ は (b_{12}) と (b_{22}) に分かれているが, residual spectrum という名称は "residual" の語源である「残り物」にちなんでいる.

Proposition 1. $T \in B(H)$ に対して,

$$\sigma(T) = P_\sigma(T) \cup C_\sigma(T) \cup R_\sigma(T).$$

このとき, $P_\sigma(T)$, $C_\sigma(T)$, $R_\sigma(T)$ は disjoint (互いに素) である.

また, $\sigma(T)$ は次のように Proposition 1 とは異なった形で分類される.

Definition 3. $T \in B(H)$ とする.

(6)
$$A_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ \|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0 \ (n \to \infty) \text{ なる単位ベクトルの列 } \{x_n\} \subset H \text{ が存在する } \}.$$

$A_\sigma(T)$ を T の **approximate point spectrum** (近似点スペクトル) という.

(7)
$$\Gamma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ \overline{R(T-\lambda)} \subsetneqq H\}.$$

$\Gamma(T)$ を T の **compression spectrum** (圧縮スペクトル) という.

Proposition 2. $T \in B(H)$ に対して,

$$\sigma(T) = A_\sigma(T) \cup \Gamma(T).$$

ただし, このとき $A_\sigma(T)$ と $\Gamma(T)$ とは互いに素であるとは限らない.

Theorem 2 より, $T - \lambda$ が可逆であるための必要十分条件は,

(i) 任意の $x \in H$ に対して $\|Tx - \lambda x\| \geq c\|x\|$ となるような $c > 0$ が存在する,

(ii) 値域 $R(T-\lambda)$ は H で dense (稠密), すなわち $\overline{R(T-\lambda)} = H$ である,

がともに成り立つことである. よって, (i) が成り立たないのが $A_\sigma(T)$, (ii) が成り立たないのが $\Gamma(T)$ であることから $\sigma(T) = A_\sigma(T) \cup \Gamma(T)$ がわかる.

Proposition 2 は numerical range $W(T)$ と spectrum $\sigma(T)$ の関係を議論するのに有効である.

Theorem 4. $T \in B(H)$ が $\|I - T\| < 1$ を満たすとき, T は可逆である.

Proof. $\|I - T\| = 1 - \alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ とする. このとき, 任意の $x \in H$ に対して

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|x - (x - Tx)\| \geq \|x\| - \|(I-T)x\| \\ &\geq \|x\| - (1-\alpha)\|x\| = \alpha\|x\|. \end{aligned}$$

よって, 後は $\overline{R(T)} = H$ を示せば Theorem 2 より証明が終了する. $y \in H$, $\delta = \inf\{\|y - x\|: \ x \in R(T)\}$ とする. このとき $\delta = 0$ であることを示せばよい. もし

$\delta > 0$ であったとすると，$(1-\alpha)\|y-x\| < \delta$ なる $x \in R(T)$ が存在する．すると，x, $T(y-x) \in R(T)$, $x + T(y-x) \in R(T)$ であることより

$$\begin{aligned}\delta &\le \|y - \{x + T(y-x)\}\| = \|(y-x) - T(y-x)\| \\ &\le \|I - T\|\|y-x\| = (1-\alpha)\|y-x\| < \delta\end{aligned}$$

となり，これは矛盾である．ゆえに $\delta = 0$ である．□

Remark 2. a を $|1-a| < 1$ を満たす実数とすると，a^{-1} は次のように表される．

$$a^{-1} = \frac{1}{1-(1-a)} = 1 + (1-a) + (1-a)^2 + \cdots .$$

Theorem 4 は上記の事実と対応したものであることがわかる．

Theorem 5. $T \in B(H)$ のとき，$\sigma(T)$ は $\mathbb{C}$ の **bounded closed set** (有界閉集合) である．また，$\lambda \in \sigma(T)$ ならば $|\lambda| \le \|T\|$ である．

Proof. $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ とする．このとき $T - \lambda_0$ は可逆であり，

$$\begin{aligned}\|I - (T-\lambda_0)^{-1}(T-\lambda)\| &= \|(T-\lambda_0)^{-1}\{(T-\lambda_0) - (T-\lambda)\}\| \\ &= |\lambda - \lambda_0|\,\|(T-\lambda_0)^{-1}\|.\end{aligned}$$

よって $|\lambda - \lambda_0|$ を十分小さくとると，$\|I - (T-\lambda_0)^{-1}(T-\lambda)\| < 1$ となる．このとき，Theorem 4 より $(T-\lambda_0)^{-1}(T-\lambda)$ は可逆となり，$T - \lambda$ も可逆，すなわち $\lambda \notin \sigma(T)$ となる．ゆえに，$\sigma(T)$ の補集合は $\mathbb{C}$ の開集合，すなわち $\sigma(T)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である．

また，$|\lambda| > \|T\|$ とすると $\left\|\dfrac{T}{\lambda}\right\| < 1$．よって，Theorem 4 より $I - \dfrac{T}{\lambda}$ は可逆，すなわち $\lambda \notin \sigma(T)$．ゆえに，対偶をとることにより，$\lambda \in \sigma(T)$ ならば $|\lambda| \le \|T\|$ である．よって $\sigma(T)$ は有界である．□

Theorem 6. $T \in B(H)$ のとき，$A_\sigma(T)$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合である．

Proof. $\lambda_0 \notin A_\sigma(T)$ とする．このとき，$\|x\| = 1$ である任意の $x \in H$ に対して $\|Tx - \lambda_0 x\| \ge \varepsilon$ であるような $\varepsilon > 0$ が存在する．よって，$\|x\| = 1$, $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ならば

$$\|Tx - \lambda x\| \ge \|Tx - \lambda_0 x\| - |\lambda - \lambda_0| \ge \frac{\varepsilon}{2}$$

なので $\lambda \notin A_\sigma(T)$．ゆえに $A_\sigma(T)$ の補集合は開集合なので，$A_\sigma(T) \subset \sigma(T)$ と Theorem 5 より $A_\sigma(T)$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合であることがわかる．□

Theorem 7. T は self-adjoint 作用素とする．このとき $Tx = \lambda x$ ならば λ は実数である．

Proof. $\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x,x)$. よって，$x \neq 0$ より $\overline{\lambda} = \lambda$ となる． □

Theorem 7 の拡張は Theorem 14 で得られている．

Theorem 8. T が self-adjoint 作用素ならば，$T + iI$ は可逆である．

Proof. $T^* = T$ より $(x, Tx) = (Tx, x)$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\|(T+iI)x\|^2 &= ((T+iI)x, (T+iI)x) \\ &= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 + i\{(x,Tx) - (Tx,x)\} \\ &\geq \|x\|^2.\end{aligned}$$

Theorem 2 より，後は $\overline{R(T+iI)} = H$ を示せばよい．$y \perp R(T+iI)$ となるように $y \in H$ をとると，任意の $x \in H$ に対して

$$0 = (y, (T+iI)x) = ((T-iI)y, x).$$

よって，$(T-iI)y = 0$, すなわち $Ty = iy$. $y \neq 0$ の場合は Theorem 7 に矛盾するので $y = 0$ となる．ゆえに，$\overline{R(T+iI)} = H$ である． □

ここで，§2.2.1 の値域 $R(T) = \{Tx :\ x \in H\}$, 核 $N(T) = \{x \in H :\ Tx = 0\}$ に関する次の結果を示す．

Theorem 9. $T \in B(H)$ とする．このとき次が成り立つ．

(i) $H = \overline{R(T)} \oplus N(T^*)$.

(ii) $H = \overline{R(T^*)} \oplus N(T)$.

Proof. $0 = (Tx, y) = (x, T^*y)$ と §1.3 の Theorem 2 ($\overline{M} = M$ のとき，$H = M \oplus M^{\perp}$) より示される． □

Theorem 10. $T \in B(H)$, $\lambda \in \Gamma(T)$ ならば，$\overline{\lambda} \in P_\sigma(T^*)$ である．

Proof. $\lambda \in \Gamma(T) \iff \overline{R(T-\lambda)} \subsetneqq H$ と $H = \overline{R(T-\lambda)} \oplus N((T-\lambda)^*)$ より $N((T-\lambda)^*) \neq \{0\}$. よって，$T^*x = \overline{\lambda}x$ となる $x \neq 0$ が存在する．ゆえに，$\overline{\lambda} \in P_\sigma(T^*)$ である． □

Corollary 11. $T \in B(H)$, $\lambda \in R_\sigma(T)$ ならば，$\overline{\lambda} \in P_\sigma(T^*)$ である．

Proof. $R_\sigma(T) \subset \Gamma(T)$ と Theorem 10 より示される． □

Theorem 12. T が normal 作用素のとき，$\sigma(T) = A_\sigma(T)$ である．

Proof. Proposition 2 より $\sigma(T) \supset A_\sigma(T)$ はつねに成り立つので，$\sigma(T) \subset A_\sigma(T)$ を示せばよい．

$\lambda \notin A_\sigma(T)$ とする．このとき，次の (8) を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在する．

(8) 任意の $y \in H$ に対して $\|Ty - \lambda y\| \geq \varepsilon\|y\|$.

また，T が normal 作用素のとき $T-\lambda$ も normal 作用素なので，§2.1.3 の Theorem 4 の (i) より，任意の $z \in H$ に対して

$$\|(T-\lambda)z\| = \|(T-\lambda)^*z\|.$$

よって，(8) は次の (9) と同値である．

(9) 任意の $y \in H$ に対して $\|T^*y - \overline{\lambda}y\| \geq \varepsilon\|y\|$.

このとき，$\lambda \notin \sigma(T)$ を示す．(8) がわかっているので，後は $\overline{R(T-\lambda)} = H$ を示せば Theorem 2 より T が可逆，すなわち $\lambda \notin \sigma(T)$ が示される．そこで，$y \perp R(T-\lambda)$ とすると，任意の $x \in H$ に対して

$$0 = ((T-\lambda)x, y) = (x, T^*y - \overline{\lambda}y).$$

よって $T^*y - \overline{\lambda}y = 0$. ゆえに，(9) より $y = 0$ なので $\overline{R(T-\lambda)} = H$ である． □

Theorem 13. T が normal 作用素のとき，$R_\sigma(T) = \emptyset$ である．

Proof. $\lambda \in R_\sigma(T)$ とすると，Corollary 11 より $\overline{\lambda} \in P_\sigma(T^*)$. また，$T$ は normal 作用素なので，任意の $y \in H$ に対して

$$\|(T-\lambda)y\| = \|(T-\lambda)^*y\|.$$

よって，$\lambda \in P_\sigma(T)$. これは $R_\sigma(T) \cap P_\sigma(T) = \emptyset$ に矛盾する．ゆえに，$R_\sigma(T) = \emptyset$ である． □

Theorem 14. T は self-adjoint 作用素とする．このとき $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ である．

Proof. $\lambda \notin \mathbb{R}$ とすると，任意の 0 でない $x \in H$ に対して

$$\begin{aligned}0 &< |\lambda - \overline{\lambda}|\,\|x\|^2 \\ &= |((T-\lambda)x, x) - ((T-\overline{\lambda})x, x)| \\ &= |((T-\lambda)x, x) - (x, (T-\lambda)x)| \qquad (T^* = T \text{ より}) \\ &\leq 2\|Tx - \lambda x\|\,\|x\| \qquad (\text{Schwarz の不等式より})\end{aligned}$$

なので $\lambda \notin A_\sigma(T)$ となる．また，T は self-adjoint 作用素なので，Theorem 12 より $\sigma(T) = A_\sigma(T)$. ゆえに，$\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ となる． □

Theorem 14 は Theorem 7 の拡張となっている．

Theorem 15. T は normal 作用素とする．このとき，$Tx = \lambda x, Ty = \mu y$, $\lambda \neq \mu$ ならば $(x, y) = 0$ である．

Proof. T は normal 作用素なので，$\|(T-\lambda)y\| = \|(T-\lambda)^* y\|$ より

$$Ty = \mu y \iff T^* y = \overline{\mu} y$$

であることに注意する．このとき，

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Tx, y) = (x, T^* y) = (x, \overline{\mu} y) = \mu(x, y).$$

よって，$\lambda \neq \mu$ より $(x, y) = 0$. □

Theorem 16. $T \in B(H)$ とする．このとき次の (i), (ii) は同値である．

(i) T は $|\mu| = \|T\|$ なる approximate point spectrum μ をもつ．

(ii) $\sup\{|(Tx, x)| : \|x\| = 1\} = \|T\|$.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii). (i) より，$|\mu| = \|T\|$ かつ $\|Tx_n - \mu x_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$ なる単

位ベクトルの列 $\{x_n\}$ が存在する．このとき，

$$\begin{aligned}|(Tx_n, x_n) - \mu| &= |(Tx_n, x_n) - \mu(x_n, x_n)| \\ &= |((T-\mu)x_n, x_n)| \\ &\leq \|Tx_n - \mu x_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

より $(Tx_n, x_n) \to \mu$, すなわち $|(Tx_n, x_n)| \to |\mu|$. よって，

$$\begin{aligned}\|T\| &\geq \sup\{|(Tx, x)| : \|x\| = 1\} \\ &\geq |(Tx_n, x_n)| \to |\mu| = \|T\| \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

より，$\sup\{|(Tx, x)| : \|x\| = 1\} = \|T\|$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). (ii) より，$|(Tx_n, x_n)| \to \|T\|$ $(n \to \infty)$ となる単位ベクトルの列 $\{x_n\}$ が存在する．このとき，$(Tx_n, x_n) \to \mu$, $|\mu| = \|T\|$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}\|Tx_n - \mu x_n\|^2 &= |(Tx_n - \mu x_n, Tx_n - \mu x_n)| \\ &= \|Tx_n\|^2 - \overline{\mu}(Tx_n, x_n) - \mu\overline{(Tx_n, x_n)} + |\mu|^2 \\ &\to |\mu|^2 - |\mu|^2 - |\mu|^2 + |\mu|^2 = 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となるので，μ は approximate point spectrum である． □

Remark 3. Theorem 16 に現われる $w(T) = \sup\{|(Tx, x)| : \|x\| = 1\}$ は **numerical radius** (数域半径) とよばれる．また，**numerical range** (数域) $W(T)$ とは次で定義されるものである．

$$W(T) = \{(Tx, x) : \|x\| = 1\}.$$

$W(T)$ は複素平面上の凸集合をなし，$\overline{W(T)}$ は spectrum $\sigma(T)$ の convex hull (凸包) を含む．また，$w(T)$ は $\|T\|$ と norm equivalent である．これらの事柄については §2.5 で紹介する．

Theorem 17. 任意の $A, B \in B(H)$ に対して，

$$\sigma(AB) - \{0\} = \sigma(BA) - \{0\}.$$

すなわち，$\sigma(AB)$ と $\sigma(BA)$ の 0 でない要素は一致する．

Proof. $\lambda \neq 0$ のとき，$AB - \lambda$ が可逆であることと $BA - \lambda$ が可逆であることが同値であることを示せばよい．また，簡単な考察により，$I - AB$ が可逆のとき $I - BA$ が可逆であることを示せばよいことがわかる．ここで，$C = (I - AB)^{-1}$ とする．この

とき，

$$(I - BA)^{-1} = I + BCA \tag{10}$$

であることを示す．$C = (I - AB)^{-1}$ より，

$$C(I - AB) = (I - AB)C = I,$$

すなわち

$$CAB = ABC = C - I \tag{11}$$

が成り立つ．よって，(11) より

$$(I + BCA)(I - BA) = (I - BA)(I + BCA) = I$$

が得られ，(10) が示される． □

Remark 4. Theprem 17 においてもっとも重要なのは，その証明自身ではなくその証明に至る次のような背景である．

まず，$C = (I - AB)^{-1}$ を次のように考える．

$$C = \frac{1}{I - AB} = I + AB + ABAB + \cdots . \tag{12}$$

すると，同様にして $D = (I - BA)^{-1}$ は次のように変形される．

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{I - BA} &= I + BA + BABA + \cdots \\ &= I + B(I + AB + ABAB + \cdots)A = I + BCA. \end{aligned} \tag{13}$$

これら (12), (13) より (10) の形が推測される．

§2.4.2 spectral mapping theorem

Theorem 1 (spectral mapping theorem(スペクトル写像定理)). $\sigma(T)$ は作用素 T の spectrum，$p(t)$ は複素係数多項式とする．このとき，

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) \tag{1}$$

が成り立つ．

Proof. $\lambda_0 \in \sigma(T)$ とすると，$p(\lambda) - p(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)g(\lambda)$ となる $g(\lambda)$ が存在する．よって $p(T) - p(\lambda_0) = (T - \lambda_0)g(T)$ となり，$p(\lambda_0) \in \sigma(p(T))$．ゆえに $p(\sigma(T)) \subseteq \sigma(p(T))$ が成り立つ．

逆に $\lambda_0 \in \sigma(p(T))$ とすると，$p(\lambda_j) = \lambda_0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ なる $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が

存在する．このとき，

$$p(T)-\lambda_0=\alpha(T-\lambda_1)(T-\lambda_2)\cdots(T-\lambda_n)$$

となり，ある k に対して $\lambda_k\in\sigma(T)$ となるので，$\lambda_0=p(\lambda_k)\in p(\sigma(T))$ となる．すなわち，$\sigma(p(T))\subseteq p(\sigma(T))$ が成り立つ．

よって $\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$ が示された．□

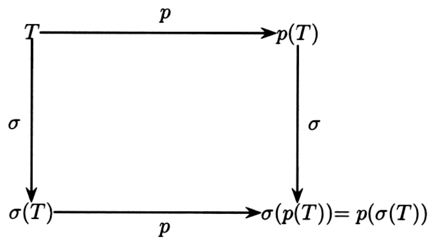


Figure 12　§2.4.2 の Theorem 1 に関するメモ．

Remark 1. 有限次元ヒルベルト空間に対しては，Theorem 1 は Frobenius (フロベニウス) の定理とよばれる．

Example 1. $T=\begin{pmatrix}2&1\\6&1\end{pmatrix}$ とする．このとき，$\sigma(T)=\{4,-1\}$．また，Theorem 1 より $\sigma(T^2)=(\sigma(T))^2=\{4^2,(-1)^2\}=\{16,1\}$．□

Theorem 2. $\sigma(T)$ は可逆な作用素 T の spectrum とする．このとき，

(2)
$$\sigma(T^{-1})=\{\sigma(T)\}^{-1}=\left\{\frac{1}{\lambda}:\lambda\in\sigma(T)\right\}$$

が成り立つ．

Proof. T は可逆なので，$0\notin\sigma(T)$．よって $\{\sigma(T)\}^{-1}$ は意味をもつ．

$$T^{-1}-\lambda^{-1}=(\lambda-T)\lambda^{-1}T^{-1}$$

に注意すると，

$$\lambda\notin\sigma(T)\Longleftrightarrow\lambda^{-1}\notin\sigma(T^{-1}).$$

対偶を考えると (2) を得る．□

Theorem 3. $\sigma(T)$ は作用素 T の spectrum とする．このとき，

$$\sigma(T^*) = \{\sigma(T)\}^* = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\} \tag{3}$$

が成り立つ．

Proof. $\lambda \notin \sigma(T)$ とすると，$T-\lambda$ は可逆．よって $T^*-\lambda^*$ も可逆なので，$\lambda^* \notin \sigma(T^*)$．すなわち $\sigma(T^*) \subseteq \{\sigma(T)\}^*$．$T$ を T^* に置き換えれば逆も同様である． □

Remark 2. Theorem 2, Theorem 3 では，Theorem 1 の結果が多項式 $p(t)$ 以外に，$p(t) = \dfrac{1}{t}$ と $p(t) = t^*$ に対して成り立つことを示している．

§2.4 に関するメモ・注釈・参考文献

ここでは，数ある作用素論に関する書物の中で初学者向けと思われるものをいくつか紹介する．

S.K.Berberian *Introduction to Hilbert Space*, Chelsea Publishing Company, New York, 1961.

C.L.DeVito *Functional analysis and linear operator theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1990.

P.R.Halmos

[1] *Introduction to Hilbert space and the theory on spectral multiplicity*, Chelsea, New York, 1951.

[2] *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Litton Educational Publishing, Inc., 1958.

[3] *Hilbert Space Problem Book*, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.

E. Kreyszig *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

J.R.Retherford *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

§2.5 作用素の numerical range

§2.5.1 numerical range は凸集合である

はじめに，非常に有名かつ歴史的な結果である "**Toeplitz-Hausdorff の定理**" を紹介する．

Definition 1. 作用素 T の **numerical range** (数域) $W(T)$ とは次のものである．

$$W(T) = \{(Tx, x) : \|x\| = 1\}.$$

Theorem T-H (Toeplitz-Hausdorff (テプリッツ–ハウスドルフ) の定理). 作用素 T の numerical range $W(T)$ は複素平面上の凸集合をなす．

この定理にはたくさんの証明が与えられている (§2.5 に関するメモ・注釈・参考文献を参照) が，ここではその中で一般的なものを紹介する．

Proof of Theorem T-H. $T \in B(H)$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\xi = (Tx, x)$, $\eta = (Ty, y)$ とするとき，ξ と η を結ぶ線分上の任意の点が $W(T)$ に含まれることを示せばよい．

$\xi = \eta$ のときは明らかなので，$\xi \neq \eta$ とする．このとき，

$$\alpha\xi + \beta = 1 \text{ かつ } \alpha\eta + \beta = 0$$

を満たす複素数 α, $\beta \in \mathbb{C}$ が存在する．

また，このとき

$$t = t(\alpha\xi + \beta) + (1-t)(\alpha\eta + \beta) = \alpha\{t\xi + (1-t)\eta\} + \beta$$

なので，区間 $[0, 1]$ が $W(\alpha T + \beta) = \alpha W(T) + \beta$ に含まれることを示せばよい．また，ここで $\xi = 1$, $\eta = 0$ としても一般性を失わない．

§2.1.3 の Theorem 6 より，$T = A + iB$ (A, B は self-adjoint 作用素) と書くことができる．$(Tx, x) = 1$, $(Ty, y) = 0$ は実数なので，$(Bx, x) = (By, y) = 0$. ここで，x を λx ($|\lambda| = 1$) に取り替えると，(Tx, x) の値は不変かつ (Bx, y) は $\lambda(Bx, y)$ に変わる．よって，(Bx, y) は純虚数であるとしてよい．

これらの仮定のもとで，$h(t) = tx + (1-t)y$ ($t \in [0, 1]$) とする．x と y が線形従属であるとすると，$y = \mu x$, $|\mu| = 1$ なる μ が存在し，$(Tx, x) = (Ty, y)$ を満たす．これは $(Tx, x) = 1$, $(Ty, y) = 0$ であることに矛盾するので，x と y は線形独立である．

ゆえに，$h(t) \neq 0$. また，$(Bx,x)=(By,y)=0$, $\mathrm{Re}(Bx,y)=0$ より

$$\begin{aligned}(Bh(t),h(t)) &= t^2(Bx,x)+t(1-t)\{(Bx,y)+\overline{(Bx,y)}\}+(1-t)^2(By,y)\\ &= t^2(Bx,x)+2t(1-t)\mathrm{Re}(Bx,y)+(1-t)^2(By,y)\\ &= 0.\end{aligned}$$

よって，任意の t に対して $(Th(t),h(t))$ は実数である．ゆえに

$$f(t)=\left(T\frac{h(t)}{\|h(t)\|},\ \frac{h(t)}{\|h(t)\|}\right)\in W(T)$$

は閉区間 [0,1] 上の連続関数，かつ $f(0)=0$, $f(1)=1$ より $[0,1]\subseteq W(T)$ となる．

□

次に，作用素の numerical range の例をいくつか述べる．

Example 1. $$T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

のとき，$W(T)=[0,1]$ (閉区間 $[0,1]$). □

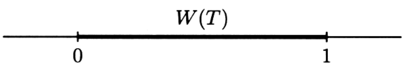


Figure 13 §2.5.1 の Example 1 に関するメモ．

Example 2. $$T=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

のとき，$W(T)=\{z:|z|\leq \frac{1}{2}\}$ (中心 0, 半径 $\frac{1}{2}$ の閉円盤). □

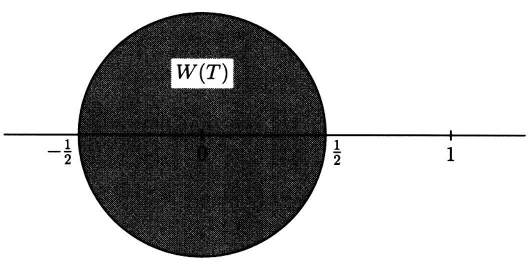


Figure 14 §2.5.1 の Example 2 に関するメモ．

Example 3. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

のとき，$W(T)$ は焦点 0, 1, 短径 1, 長径 $\sqrt{2}$ の閉楕円盤. □

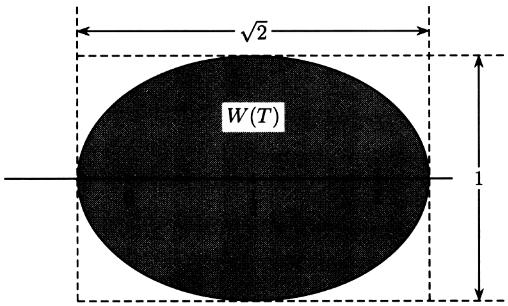


Figure 15 §2.5.1 の Example 3 に関するメモ.

Example 1, Example 2, Example 3 を含む一般的な 2×2 行列の numerical range に関する定理は以下のようになる．なお，証明は割愛する.

Theorem 1. T が 2×2 行列のとき，$W(T)$ は次のようになる.

(i) T が相異なる固有値 α, β をもつとき，それぞれの固有値に対応する正規化された固有ベクトルを x, y とすると，$W(T)$ は焦点 α, β の閉楕円盤となる．また，このときの短径と長径はそれぞれ次のように表される.

$$\text{短径} = \frac{\gamma|\alpha - \beta|}{\delta}, \qquad \text{長径} = \frac{|\alpha - \beta|}{\delta}.$$

ただし，$\gamma = |(x, y)|$, $\delta = \sqrt{1 - \gamma^2}$ である.

(ii) T がただ一つの固有値 α をもつとき，$W(T)$ は中心 α, 半径 $\frac{1}{2}\|T - \alpha\|$ の閉円盤となる.

次の 3×3 行列における 2 つの例は，numerical range に関して 2×2 行列が典型とはならないことを示している.

Example 4. $$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき，$W(T)$ は 1 の 3 つの立方根 $1, \omega, \omega^2$ $(\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2})$ を頂点とする正三角形の周および内部. □

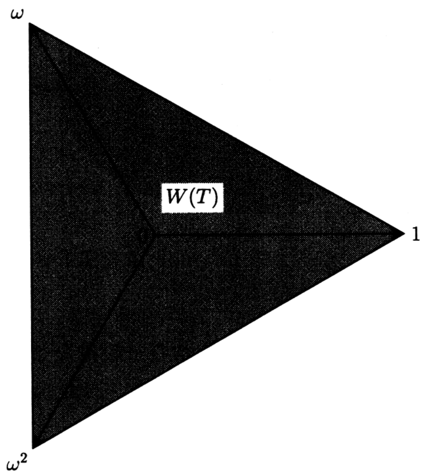


Figure 16 §2.5.1 の Example 4 に関するメモ.

Example 5. $$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のとき，$W(T)$ は一点 1 と中心が 0 で半径 $\frac{1}{2}$ の閉円盤上の点を結ぶあらゆる閉じた線分の和集合. □

Remark 1. $W(T) = \{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ において，$\|x\| \leq 1$ でなく $\|x\| = 1$ であることは非常に重要である．なぜならば，$W'(T) = \{(Tx, x) : \|x\| \leq 1\}$ は $W(T)$ によって簡単に表すことができるが，$W(T)$ は $W'(T)$ によって表すことができないからである．実際，$W'(T)$ は $W(T)$ 上の点と原点を結ぶ閉じた線分の和集合となっている.

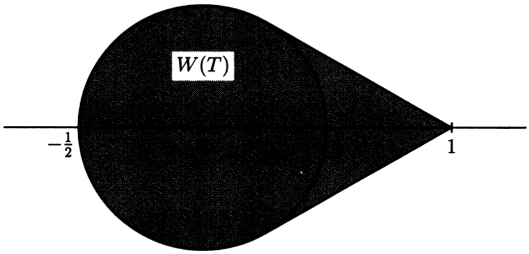


Figure 17 §2.5.1 の Example 5 に関するメモ.

§2.5.2 numerical radius は作用素ノルムと norm equivalent である

ここで, 作用素ノルム $\|T\|$ と norm equivalent であり, numerical range $W(T)$ と関連した numerical radius $w(T)$ を導入する.

Definition 1. $$w(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}$$
を T の **numerical radius** (数域半径) という. また,

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

を T の **spectral radius** (スペクトル半径) という.

Theorem 1. $T \in B(H)$ とする. このとき,

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\|$$

が成り立つ.

Proof. §2.1.3 の generalized polarization identity

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}\{(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) \\ + i(T(x+iy), x+iy) - i(T(x-iy), x-iy)\}$$

より,

$$|(Tx, y)| \leq \frac{1}{4}w(T)\{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\}$$

($w(T)$ の定義より)

$$= \frac{1}{4} w(T) \cdot 4(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (\text{§1.1 の parallelogram law より})$$
$$= w(T)(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

よって，$\|T\| = \sup\{|(Tx, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\}$ より $\|T\| \le 2w(T)$.

また，$w(T) \le \|T\|$ は $|(Tx, x)| \le \|T\| \, \|x\|^2$ よりわかる．□

Theorem 1 は $w(T)$ が作用素ノルム $\|T\|$ と norm equivalent であることを示している．

Theorem 2 ($w(T)$ の power inequality (べき不等式)). $T \in B(H)$ とする．このとき，任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$w(T^n) \le w(T)^n.$$

Proof. $w(T)$ の斉次性より，$w(T) \le 1$ のとき任意の自然数 n に対して $w(T^n) \le 1$ であることを示せば十分である．

$w(T) \le 1$ のとき，$|z| < 1$ なる任意の複素数 z に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}((I - zT)x, x) &= \|x\|^2 - \mathrm{Re}(zTx, x) \\ &\ge \|x\|^2(1 - |z|) \ge 0\end{aligned}$$

である．逆に，$|z| < 1$ なる任意の複素数 z に対して $\mathrm{Re}((I - zT)x, x) \ge 0$ のとき，$z = te^{i\alpha}$ とおき，$t \to 1$ とすると $\mathrm{Re}(e^{i\alpha}Tx, x) \le \|x\|^2$ より $w(T) \le 1$ である．また，$r(T) \le w(T) \le 1$ (§2.5.3 の Theorem 1 (ii) 参照) に注意すると，$|z| < 1$ なる任意の複素数 z に対して $I - zT = -z\left(T - \dfrac{1}{z}\right)$ は可逆である．よって $x = (I - zT)^{-1}y$ とすれば，任意の $x, y \in H$ に対して

$$\begin{aligned}&(1) \qquad w(T) \le 1 \iff \mathrm{Re}((I - zT)x, x) \ge 0 \\ &\qquad\qquad\qquad \iff \mathrm{Re}((I - zT)^{-1}y, y) \ge 0.\end{aligned}$$

したがって，任意の $x \in H$ と $|z| < 1$ なる複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathrm{Re}((I - z^nT^n)^{-1}x, x) \ge 0$$

であることを示せば，(1) より $w(T^n) \le 1$ が示される．そこで，部分分数分解によって導かれる次の等式を考える．

$$(I - z^nT^n)^{-1} = \frac{1}{n}\{(I - zT)^{-1} + (I - \omega zT)^{-1} + \cdots + (I - \omega^{n-1}zT)^{-1}\}.$$

ただし $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ とする．このとき (1) より，任意の $x \in H$ と $|z| < 1$ なる複素数

$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathrm{Re}((I-\omega^k zT)^{-1}x, x) \geq 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

が成り立つので，$\mathrm{Re}((I - z^nT^n)^{-1}x, x) \geq 0$ である．ゆえに $w(T^n) \leq 1$ が示された．

□

§2.5.3　numerical range の閉包は spectrum を含む

Theorem 1. $T \in B(H)$ とする．このとき次が成り立つ．

(i) numerical range の閉包は spectrum を含む．すなわち

$$\overline{W(T)} \supseteq \mathrm{co}\ \sigma(T).$$

ただし，$\mathrm{co}\ \sigma(T)$ は $\sigma(T)$ の凸包を表す．

(ii) $r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$.

(iii) 1 番目の不等式では $\mu \notin \sigma(T)$, 2 番目の不等式では $\mu \notin \overline{W(T)}$ に対して

$$\frac{1}{d(\mu, \sigma(T))} \leq \|(T-\mu)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\mu, \overline{W(T)})}.$$

Proof. (i) §2.5.1 の Theorem T-H より $W(T)$ は複素平面上の凸集合なので，$\overline{W(T)} \supseteq \sigma(T)$ を示せばよい．

$\mu \notin \overline{W(T)}$ とする．このとき，Schwarz の不等式より，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$0 < d = d(\mu, \overline{W(T)}) \leq |(Tx, x) - \mu| = |((T-\mu)x, x)| \leq \|Tx - \mu x\|.$$

よって，任意の $y \in H$ に対して

$$\text{(1)} \qquad \|Ty - \mu y\| \geq d\|y\|$$

が成り立つので，$\mu \in \rho(T)$ または $\mu \in R_\sigma(T)$ である．ところが，$\mu \in R_\sigma(T)$ とすると，§2.4.1 の Corollary 11 より $\overline{\mu} \in P_\sigma(T^*)$. よって，$T^*x = \overline{\mu}x$ なる単位ベクトル x が存在するので，$\overline{\mu} \in W(T^*)$, すなわち $\mu \in W(T)$. これは $\mu \notin \overline{W(T)}$ に矛盾する．ゆえに $\mu \in \rho(T) = \sigma(T)^c$, すなわち $\mu \notin \sigma(T)$. したがって，対偶を考えれば題意は示される．

(ii) (i) と §2.5.2 の Theorem 1 より示される．

(iii) 2 番目の不等式は (i) の証明中の (1) より成り立つ．また，1 番目の不等式は次

のように示される．任意の $\mu \notin \sigma(T)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad \frac{1}{d(\mu, \sigma(T))} &= \sup \frac{1}{|\sigma(T) - \mu|} \\
&= \sup \frac{1}{|\sigma(T - \mu)|} \qquad (\text{§2.4.2 の Theorem 1 より}) \\
&= \sup |\sigma((T - \mu)^{-1})| \qquad (\text{§2.4.2 の Theorem 2 より}) \\
&= r((T - \mu)^{-1}) \\
&\leq \|(T - \mu)^{-1}\| \qquad ((\text{ii}) \text{ より}). \qquad \square
\end{aligned}
$$

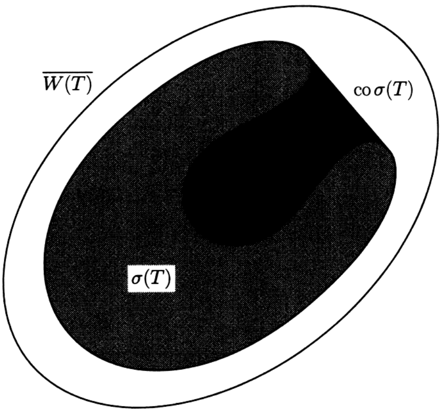


Figure 18 §2.5.3 の Theorem 1 に関するメモ．

§2.5.4 normaloid 作用素は spectraloid 作用素である

Definition 1. $T \in B(H)$ が $\|T\| = r(T)$ を満たすとき，T は **normaloid 作用素**であるという．また，$T \in B(H)$ が $w(T) = r(T)$ を満たすとき，T は **spectraloid 作用素**であるという．

Theorem 1. $T \in B(H)$ とする．このとき，

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

が成り立つ.

Proof. $r(T)^n = r(T^n) \leq \|T^n\|$ より $r(T) \leq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ であることはわかる. 逆向きの不等号に関しては若干難しいのでここでは省略する. □

Theorem 2 (normaloid 作用素の特徴づけ). $T \in B(H)$ とする. このとき, 次の命題 (i)~(iii) は互いに同値である.

(i) T は normaloid 作用素, すなわち $\|T\| = r(T)$.

(ii) 任意の自然数 n に対して $\|T^n\| = \|T\|^n$.

(iii) $\|T\| = w(T)$.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii). $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ はつねに成り立つ. また, $\|T^n\| \geq \|T\|^n$ は以下のように示すことができる.

$$\begin{aligned}\|T\|^n &= r(T)^n && \text{((i) より)}\\ &= r(T^n) && \text{(§2.4.2 の Theorem 1 より)}\\ &\leq \|T^n\| && \text{(§2.5.3 の Theorem 1 (ii) より).}\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). (ii) より $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T\|$ なので, Theorem 1 より

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T\|.$$

(i) $\Longrightarrow$ (iii). §2.5.3 の Theorem 1 の (ii) より, $r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$. よって, $\|T\| = r(T)$ ならば $\|T\| = w(T)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). $w(T)$ と $r(T)$ の斉次性より, $\|T\| = w(T) = 1$ ならば $\|T\| = r(T) = 1$ であることを示せば十分である. $\|T\| = w(T) = 1$ より, $|(Tx_n, x_n)| \to 1$ $(n \to \infty)$ なる単位ベクトルの列 $\{x_n\}$ が存在する. また, 絶対値 1 の定数をかけることにより, $(Tx_n, x_n) \to 1$ $(n \to \infty)$ なる単位ベクトルの列 $\{x_n\}$ が存在するとしても一般性は失わない. このとき, $|(Tx_n, x_n)| \leq \|Tx_n\| \leq 1$ より

$$\|Tx_n - x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(Tx_n, x_n) + 1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

よって, $1 \in A_\sigma(T)$ なので $r(T) = 1 = \|T\|$ である. □

Remark 1. Theorem 2 は §2.4.1 の Theorem 16 と本質的に同じである.

Theorem 3. self-adjoint 作用素 T は normaloid 作用素である.

Proof. T を self-adjoint 作用素とすると，§2.1.2 の Corollary 2 の (i) より $\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$. 帰納法により $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$ がわかるので，Theorem 1 より

$$\|T\| = \lim_{n\to\infty} \|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = r(T)$$

である. □

Corollary 4. normal 作用素 T は normaloid 作用素である.

Proof. T と T^* は可換なので，$(T^*T)^n = T^{*n}T^n$. よって T^*T は self-adjoint であるから，Theorem 3 より

$$\begin{aligned}\|T\| = \|T^*T\|^{\frac{1}{2}} &= \lim_{n\to\infty} \|(T^*T)^n\|^{\frac{1}{2n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|T^{*n}T^n\|^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r(T).\end{aligned}$$ □

Remark 2. じつは，normaloid は hyponormal 作用素を含む作用素のクラスであることが知られている (§2.6.2 の Theorem 1 参照).

Theorem 5 (spectraloid 作用素の特徴づけ). $T \in B(H)$ とする．このとき，次の命題 (i), (ii) は互いに同値である.

(i) T は spectraloid 作用素，すなわち $w(T) = r(T)$.

(ii) 任意の自然数 n に対して $w(T^n) = w(T)^n$.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii). §2.5.2 の Theorem 2 より $w(T^n) \le w(T)^n$ はつねに成り立つ. また，$w(T^n) \ge w(T)^n$ は以下のように示すことができる.

$$\begin{aligned} w(T)^n &= r(T)^n && \text{((i) より)} \\ &= r(T^n) && \text{(§2.4.2 の Theorem 1 より)} \\ &\le w(T^n) && \text{(§2.5.3 の Theorem 1 (ii) より).} \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). §2.4.2 の Theorem 1 (spectral mapping theorem) と §2.5.3 の Theorem 1 の (ii) より，

(1) $$r(T) = r(T^n)^{\frac{1}{n}} \le w(T^n)^{\frac{1}{n}} \le \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

(ii) より $w(T^n)^{\frac{1}{n}} = w(T)$ なので，(1) と Theorem 1 より

$$r(T) \le w(T) \le \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \to r(T) \qquad (n \to \infty).$$

よって，$w(T) = r(T)$ が成り立つ. □

§2.5 に関するメモ・注釈・参考文献

W.F.Donoghue *On the Numerical Range of a Bounded Operator*, Michigan Math. J., **4**(1957), 261–263.

T.Furuta and Z.Takeda *A characterization of spectraloid operators and its generalization*, Proc. Japan Acad., **43**(1967), 599–604.

M.Goldberg and E.G.Straus *Norm properties of C-numerical radii*, Linear Algebra Appl., **24**(1979), 113–131.

K.E.Gustafson *The Toeplitz-Hausdorff theorem for linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **25**(1970), 203–204.

K.E.Gustafson and D.K.M.Rao *Numerical Range*, Springer-Verlag, New York, 1997.

P.R.Halmos *Hilbert Space Problem Book*, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.

F.Hausdorff *Der Wertvorrat einer Bilinearform*, Math. Z., **3**(1919), 314–316.

C.K.Li *C-Numerical ranges and C-numerical radii*, Linear and Multilinear Algebra, **37**(1994), 51–82.

C.Pearcy *An elementary proof of the power inequality for the numerical radius*, Michigan Math. J., **13**(1966), 289–291.

O.Toeplitz *Das algbraische Analogon zu einem Satz von Fejér*, Math. Z., **2**(1918), 187–197.

A.Wintner *Zur theorie beschränkten Bilinearformen*, Math. Z., **30**(1929), 228–282.

Theorem T-H は **Toeplitz-Hausdorff** (テプリッツ–ハウスドルフ) **の定理**として大変有名である．最初に，[Toeplitz 1918] で $W(T)$ の境界が凸であることが示された．$W(T)$ の内点に関しては，[Hausdorff 1919] で $W(T)$ が単連結であることが示された．Theorem T-H にはたくさんの証明が与えられているが，ここではその一部として [Gustafson 1970], [Goldberg-Straus 1979], [Li 1994] を紹介しておく．

§2.5.1 の Theorem 2 は [Donoghue 1957] による．

numerical range の例など，本章の内容に関しては [Halmos 1967], [Gustafson-Rao 1995] を大変参考にした．§2.5.2 の Theorem 2 に対するおもしろい証明は [Gustafson-Rao 1995] の Theorem 2.1-1 を引用した．この証明は原論文 [Pearcy 1966] を簡略化した [P.R.Halmos 1967] の Solution of 176 をさらに簡単にしたものである．

normaloid 作用素の概念は [Wintner 1929] で最初に与えられた．

spectraloid 作用素は [Halmos 1967] の Chapter 17 で導入された．また，§2.5.4 の Theorem 5 は [Furuta-Takeda 1967] で示された．

§2.6 非正規作用素のクラスの関係

§2.6.1 paranormal 作用素

本節において，特に断りのないときは $T \in B(H)$ とする．

Definition 1. 任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して，

$$\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$$

を満たすとき，T は **paranormal 作用素**であるという．

Definition 2. $T \in B(H)$ が **normal extension** (正規拡大) N をもつ，すなわち，任意の $x \in H$ に対して $Tx = Nx$ となるような H を含むヒルベルト空間 K 上の normal 作用素 N が存在するとき，T は **subnormal 作用素**であるという．

Theorem 1. T が paranormal 作用素のとき，任意の $x \in H$ と自然数 n に対して次の不等式が成り立つ．

(1) $$\|T\| \geq \cdots \geq \frac{\|T^{n+2}x\|}{\|T^{n+1}x\|} \geq \frac{\|T^{n+1}x\|}{\|T^n x\|} \geq \frac{\|T^n x\|}{\|T^{n-1}x\|} \geq \cdots \geq \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

さらに T が可逆のときは，任意の $x \in H$ と自然数 n に対して次の不等式も成り立つ．

(2) $$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|x\|}{\|T^{-1}x\|} \geq \frac{\|T^{-1}x\|}{\|T^{-2}x\|} \geq \cdots \geq \frac{\|T^{-n+1}x\|}{\|T^{-n}x\|} \geq \cdots \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

Proof. paranormal 作用素の定義において，単位ベクトル x を $\dfrac{x}{\|x\|}$ に置き換えて整理すると，

(3) T が paranormal 作用素 $\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in H$ に対して $\dfrac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \geq \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

よって，(3) において x を Tx に置き換える作業を繰り返すと (1) を得る．

また，T が可逆のときは (3) において x を $T^{-1}x$ に置き換える作業を繰り返すと (2) を得る． □

Theorem 2. T が paranormal 作用素のとき，次の性質を満たす．

(i) 任意の自然数 n に対して T^n は paranormal 作用素である．

(ii) T は normaloid 作用素，すなわち，$\|T\| = r(T)$.

(iii) T が可逆のとき，T^{-1} は paranormal 作用素である．

Proof. (i) (1) より，任意の $x \in H$ と自然数 n に対して

$$\frac{\|T^{2n}x\|}{\|T^n x\|} \geq \frac{\|T^n x\|}{\|x\|}.$$

よって，任意の単位ベクトル $x \in H$ と自然数 n に対して

$$\|T^{2n}x\| \geq \|T^n x\|^2$$

なので T^n は paranormal 作用素である．

(ii) (1) より，任意の $x \in H$ と自然数 n に対して

$$\frac{\|T^n x\|}{\|Tx\|} \geq \left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{n-1}.$$

よって，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して $\|T^n x\| \geq \|Tx\|^n$ なので，

$$\|T^n\| \geq \|T\|^n.$$

また，$\|T^n\| \leq \|T\|^n$ はつねに成り立つので，任意の自然数 n に対して $\|T^n\| = \|T\|^n$.
ゆえに，§2.5.4 の Theorem 2 より T は normaloid 作用素である．

(iii) (2) より，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$\|T^{-2}x\| \geq \|T^{-1}x\|^2.$$

よって，T^{-1} は paranormal 作用素である． □

§2.6.2 非正規作用素のクラスの間の包含関係

Theorem 1. 作用素のクラスに関して，次のような包含関係が成り立つ．

$$\text{self-adjoint} \subseteq \text{normal} \subseteq \text{quasinormal} \subseteq \text{subnormal}$$
$$\subseteq \text{hyponormal} \subseteq \text{paranormal} \subseteq \text{normaloid} \subseteq \text{spectraloid}$$

Proof. • self-adjoint ⊆ normal ⊆ quasinormal: 自明.

• hyponormal ⊆ paranormal: T を hyponormal 作用素とすると，§2.1.3 の Theorem 4 の (iv) より，任意の $x \in H$ に対して

$$\|Tx\| \geq \|T^*x\|.$$

ここで x を Tx に置き換えると，任意の $x \in H$ に対して

$$\|TTx\| \geq \|T^*Tx\|.$$

よって，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$\|Tx\|^2 = (T^*Tx, x) \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^2x\| \|x\| = \|T^2x\|$$

となるので，T は paranormal 作用素である.

• paranormal ⊆ normaloid: §2.6.1 の Theorem 2 の (ii) による.

• normaloid ⊆ spectraloid: §2.5.3 の Theorem 1 の (ii) より

$$r(T) \leq w(T) \leq \|T\|.$$

よって，$\|T\| = r(T)$ ならば $w(T) = r(T)$.

• subnormal ⊆ hyponormal: $T \in B(H)$ を hyponormal 作用素とする.

$K = H \oplus (K - H)$ とするとき, T の normal extension $N \in B(K)$ は $N = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ と表すことができる. このとき,

$$N^*N = \begin{pmatrix} T^* & 0 \\ X^* & Y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^*T & T^*X \\ X^*T & X^*X + Y^*Y \end{pmatrix},$$

$$NN^* = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^* & 0 \\ X^* & Y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TT^* + XX^* & XY^* \\ YX^* & YY^* \end{pmatrix}.$$

よって，$N^*N = NN^*$ より $T^*T = TT^* + XX^*$. ゆえに，$XX^* \geq 0$ なので $T^*T \geq TT^*$.

• quasinormal ⊆ subnormal: T を quasinormal 作用素とし，その極分解を $T = U|T|$ とする. まず, quasinormal ⊆ hyponormal を示す. §2.3.3 の Theorem 3 より, T が quasinormal 作用素であることと $U|T| = |T|U$ は同値である. よって,

$$T^*T - TT^* = |T|^2 - U|T||T|U^* = |T|(I - UU^*)|T| \geq 0$$

となるので，T は hyponormal 作用素である．

次に，quasinormal $\subseteq$ subnormal を示す．ここで $[T] = T^*T - TT^*$ とする．このとき，$[T] \geq 0$ であることに注意する．また，

$$[T]T = T^*TT - TT^*T = T^*TT - T^*TT = 0.$$

この共役を考えると $T^*[T] = 0$ なので，任意の自然数 n に対して $[T]^nT = T^*[T]^n = 0$. よって，$S = [T]^{\frac{1}{2}}$ とすると S は $[T]$ の多項式で一様近似されるので，$ST = T^*S$.

そこで，$N \in B(H \oplus H)$ を $N = \begin{pmatrix} T & S \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$ とすると，

$$NN^* - N^*N = \begin{pmatrix} TT^* + S^2 & ST \\ T^*S & T^*T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T^*T & T^*S \\ ST & S^2 + TT^* \end{pmatrix} = 0.$$

よって T は normal extension N をもつので，T は subnormal 作用素である． □

Remark 1. hyponormal, paranormal, normaloid などの包含関係を示した図と，それらに関する具体例に関しては §2.7.2 を参照.

§2.6 に関するメモ・注釈・参考文献

T.Furuta *On the class of paranormal operators*, Proc. Japan Acad., **43**(1967), 594–598.

P.R.Halmos *Hilbert Space Problem Book*, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.

V.Istratescu, T.Saito and T.Yoshino *On a class of operators*, Tohoku Math. J., **18**(1966), 410–413.

§2.6.1 の Theorem 2 は [Furuta 1967], [Istratescu-Saito-Yoshino 1966] による．§2.6.2 の Theorem 1 は主に [Halmos 1967] を参照した．

§2.7 convexoid 作用素の特徴づけ

§2.7.1 convexoid 作用素の特徴づけ

本節において，特に断りのないときは，$T \in B(H)$ とする．ここでは，numerical range と spectrum に関連した作用素のクラスについて述べる．

Definition 1. $\overline{W(T)} = \text{co}\ \sigma(T)$ を満たすとき，T は **convexoid 作用素**であるという．ただし，$\text{co}\ \sigma(T)$ は $\sigma(T)$ の凸包を表す．

任意の $\mu \notin \sigma(T)$ に対して $\|(T-\mu)^{-1}\| = \dfrac{1}{d(\mu, \sigma(T))}$ を満たすとき，T は **condition $\mathbf{G_1}$ 作用素**であるという．

任意の複素数 $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $T-\mu$ が normaloid 作用素であるとき，T は **transaloid 作用素**であるという．

Theorem 1. T が convexoid 作用素であることと，任意の複素数 $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $T-\mu$ が spectraloid 作用素であることは同値である．

Theorem 2. T が convexoid 作用素であることと，任意の $\mu \notin \text{co}\ \sigma(T)$ に対して次の不等式が成り立つことは同値である．

$$\|(T-\mu)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\mu, \text{co}\ \sigma(T))} \tag{1}$$

次の Lemma 1 は幾何学的に明らかであるが，Theorem 1 と Theorem 2 の関係を説明する重要な役割を果たしている．

Lemma 1. X を複素平面上の有界閉集合とする．

(i)
$$\text{co}\, X = \{X \text{ を含むすべての円の共通部分}\} = \bigcap_{\mu} \{\lambda : |\lambda - \mu| \leq \sup_{x \in X} |x-\mu|\}.$$

(ii)
$$\text{co}\, X = \{X \text{ を含むすべての半平面の共通部分}\}$$

$$= \bigcap_{\theta} \left\{ \lambda : \operatorname{Re} \lambda e^{i\theta} \geq \inf_{s \in X} \operatorname{Re} s e^{i\theta} \right\}.$$

Proof of Theorem 1. Lemma 1 の (i) において $X = \overline{W(T)}$, $\sigma(T)$ とおく. $\overline{W(T)}$ は凸集合であることに注意すると,

$$\overline{W(T)} = \bigcap_{\mu} \{\lambda : |\lambda - \mu| \leq w(T - \mu)\},$$

$$\operatorname{co} \sigma(T) = \bigcap_{\mu} \{\lambda : |\lambda - \mu| \leq r(T - \mu)\}.$$

よって, 任意の複素数 $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $T - \mu$ が spectraloid 作用素, すなわち $w(T - \mu) = r(T - \mu)$ ならば, T が convexoid 作用素であることはすぐにわかる.

逆に, T が convexoid 作用素のとき, §2.4.2 の Theorem 1 より

$$\begin{aligned} \overline{W(T - \mu)} &= \overline{W(T)} - \mu \\ &= \operatorname{co} \sigma(T) - \mu = \operatorname{co} \sigma(T - \mu) \end{aligned}$$

なので, 任意の複素数 $\mu \in \mathbb{C}$ に対して

$$w(T - \mu) = r(T - \mu),$$

すなわち $T - \mu$ は spectraloid 作用素である. □

Proof of Theorem 2. T を convexoid 作用素とすると, §2.5.3 の Theorem 1 より, 任意の $\mu \notin \overline{W(T)} = \operatorname{co} \sigma(T)$ に対して

$$\|(T - \mu)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\mu, \overline{W(T)})} = \frac{1}{d(\mu, \operatorname{co} \sigma(T))}.$$

逆に, 任意の $\mu \notin \operatorname{co} \sigma(T)$ に対して (1) が成り立つと仮定する. このとき (1) は, 任意の $\mu \notin \operatorname{co} \sigma(T)$ と単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$\text{(2)} \qquad \|(T - \mu)x\| \geq d(\mu, \operatorname{co} \sigma(T)) = \inf_{s \in \operatorname{co} \sigma(T)} |s - \mu|$$

が成り立つことと同値である. さらに, (2) の両辺を 2 乗すると

$$\|Tx\|^2 - 2 \operatorname{Re}\big((Tx, x)\overline{\mu}\big) + |\mu|^2 \geq \inf_{s \in \operatorname{co} \sigma(T)} (|s|^2 - 2 \operatorname{Re} s\overline{\mu} + |\mu|^2).$$

$\mu = |\mu| e^{-i(\theta + \pi)}$ とし, 両辺 $|\mu|$ で割った後 $|\mu| \to \infty$ とすると, 任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$\operatorname{Re}\big((Tx, x)e^{i\theta}\big) \geq \inf_{s \in \operatorname{co} \sigma(T)} \operatorname{Re} s e^{i\theta}.$$

よって, Lemma 1 の (ii) より $\overline{W(T)} \subseteq \operatorname{co} \sigma(T)$. また, §2.5.3 の Theorem 1 より $\overline{W(T)} \supseteq \operatorname{co} \sigma(T)$ はつねに成り立つので, $\overline{W(T)} = \operatorname{co} \sigma(T)$ を得る. □

Remark 1. Theorem 1 と Theorem 2 はまったく違った形をした 2 つの convexoid 作用素の特徴づけであるが，じつは，その違いは Lemma 1 の (i) と (ii) の取替えにすぎないことがわかる．

Theorem 3. T が hyponormal 作用素のとき，次の性質を満たす．

(i) 任意の複素数 $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $T-\mu$ は hyponormal 作用素である．

(ii) T は transaloid 作用素である．

(iii) T が可逆のとき，T^{-1} は hyponormal 作用素である．

(iv) T は condition G_1 作用素である．

Proof. (i) 次の計算により簡単にわかる．

$$\begin{aligned}&(T-\mu)^*(T-\mu)-(T-\mu)(T-\mu)^*\\&=T^*T-\overline{\mu}T-\mu T^*+|\mu|^2-(TT^*-\overline{\mu}T-\mu T^*+|\mu|^2)\\&=T^*T-TT^*\geq 0.\end{aligned}$$

(ii) (i) より，任意の複素数 $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $T-\mu$ は hyponormal 作用素．よって §2.6.2 の Theorem 1 より $T-\mu$ は normaloid 作用素なので，T は transaloid 作用素である．

(iii)
$$\begin{aligned}T^*T\geq TT^* &\iff T^{-1}T^*TT^{*-1}\geq I\\&\iff I\geq T^*T^{-1}T^{-1*}T \iff T^{-1*}T^{-1}\geq T^{-1}T^{-1*}\end{aligned}$$
よりわかる．

(iv) §2.5.3 の Theorem 1 の (iii) の証明中の (2) より，

$$\frac{1}{d(\mu,\sigma(T))}=r((T-\mu)^{-1}).$$

また，(i), (iii) と §2.6.2 の Theorem 1 より $\|(T-\mu)^{-1}\|=r((T-\mu)^{-1})$ なので，

$$\frac{1}{d(\mu,\sigma(T))}=\|(T-\mu)^{-1}\|.$$

よって，T は condition G_1 作用素である． □

Theorem 4.

(i) T が transaloid 作用素ならば，T は convexoid 作用素である．

(ii) T が condition G_1 作用素ならば，T は convexoid 作用素である．

Proof. (i) T を transaloid 作用素，すなわち，任意の $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $T-\mu$ は normaloid 作用素であるとすると，§2.6.2 の Theorem 1 より $T-\mu$ は spectraloid 作

用素なので，Theorem 1 より T は convexoid 作用素である．

(ii) T を condition G_1 作用素とすると，任意の $\mu \notin \mathrm{co}\,\sigma(T)$ に対して

$$\|(T-\mu)^{-1}\| = \frac{1}{d(\mu, \sigma(T))} \leq \frac{1}{d(\mu, \mathrm{co}\,\sigma(T))}.$$

よって，Theorem 2 より T は convexoid 作用素である． □

Corollary 5.

(i) T が hyponormal 作用素ならば，T は convexoid 作用素である．

(ii) T が normal 作用素ならば，T は convexoid 作用素である．

Proof. (i) Theorem 3 の (ii) より，T は hyponormal 作用素ならば transaloid 作用素である．また，Theorem 4 の (i) より，T は transaloid 作用素ならば convexoid 作用素である．

なお，次のようにしても証明できる．Theorem 3 の (iv) より，T は hyponormal 作用素ならば condition G_1 作用素である．また，Theorem 4 の (ii) より，T は condition G_1 作用素ならば convexoid 作用素である．

(ii) normal 作用素は hyponormal 作用素であることと (i) より明らか． □

次の等式 (3) は非正規作用素に対して意味をなすものであることが知られている (§2.7 に関するメモ・注釈・参考文献を参照)．

$$\mathrm{Re}\,\sigma(T) = \sigma(\mathrm{Re}\,T). \tag{3}$$

ここでは，Theorem 1 と Theorem 2 の証明と同様な考えによって得られる (3) と関連した convexoid 作用素の特徴づけを与える．

Theorem 6. T が convexoid 作用素であることと，任意の $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対して次の等式が成り立つことは同値である．ここで，$S \in B(H)$ に対して $\Sigma(S)$ は $\mathrm{co}\,\sigma(S)$ を表すものとする．

$$\mathrm{Re}\,\Sigma(e^{i\theta}T) = \Sigma(\mathrm{Re}(e^{i\theta}T)). \tag{4}$$

Proof. self-adjoint 作用素は convexoid 作用素であることに注意すると，任意の $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対して次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\Sigma(\mathrm{Re}(e^{i\theta}T)) &= \overline{W(\mathrm{Re}(e^{i\theta}T))} \\ &= \mathrm{Re}\,\overline{W(e^{i\theta}T)} = \mathrm{Re}\{e^{i\theta}\overline{W(T)}\}.\end{aligned} \tag{5}$$

また，§2.4.2 の Theorem 1 より任意の $0 \le \theta \le 2\pi$ に対して次の式が成り立つ．

(6) $$\operatorname{Re}\Sigma(e^{i\theta}T) = \operatorname{Re}\{e^{i\theta}\Sigma(T)\}.$$

よって，(5), (6) より $\overline{W(T)} = \Sigma(T)$ と (4) は同値である． □

Theorem 6′. T が convexoid 作用素であることと，任意の $0 \le \theta \le 2\pi$ に対して次の等式が成り立つことは同値である．

(7) $$\operatorname{co}\operatorname{Re}\sigma(e^{i\theta}T) = \operatorname{co}\sigma(\operatorname{Re}(e^{i\theta}T)).$$

Proof. (4) と (7) が同値であることより明らか． □

Theorem 7. T を $\sigma(T)$ と $\sigma(\operatorname{Re}T)$ がともに連結集合であるような convexoid 作用素とすると，(3) が成り立つ．

Proof. T を convexoid 作用素とする．このとき，Theorem 6′ において $\theta = 0$ とおくと，

(8) $$\operatorname{co}\operatorname{Re}\sigma(T) = \operatorname{co}\sigma(\operatorname{Re}T).$$

また，実軸上の連結集合と凸集合は一致するので，$\operatorname{Re}\sigma(T)$ と $\sigma(\operatorname{Re}T)$ は実軸上の閉凸集合である．よって，(8) において "co" を消去することができ，$\operatorname{Re}\sigma(T) = \sigma(\operatorname{Re}T)$ を得る． □

Theorem 6′ から Theorem 7 を示したのと同様の方法で次の 2 つの系を示すことができる．

Corollary 8. T は convexoid 作用素とする．$\operatorname{Re}\sigma(T)$ を含む最小の区間を $[\alpha_0, \beta_0]$ とすると，$\alpha_0, \beta_0 \in \sigma(\operatorname{Re}T)$ となる．

Corollary 9. T を $\sigma(T)$ が連結集合であるような convexoid 作用素とする．このとき，$\sigma(\operatorname{Re}T)$ を含む最小の区間を $[\alpha, \beta]$ とすると，

$$\sigma(\operatorname{Re}T) \subset [\alpha, \beta] \subset \operatorname{Re}\sigma(T)$$

となる．

§2.7.2　hyponormal, paranormal, normaloid, convexoid に関する例

ここでは，hyponormal, paranormal, normaloid, convexoid に関する例を与える．

Example 1. convexoid, paranormal ではないが, normaloid である作用素.
T を次のような無限次元行列とする．

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & M & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & M & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & M & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \text{ただし } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき，

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

より，任意の自然数 n に対して

$$\|T^n\| = \|T\|^n = 1$$

なので T は normaloid 作用素．ところが，$\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ は単位ベクトル $x = e_2 = (0,1,0,0,\ldots)$ や $x = e_4 = (0,0,0,1,0,0,\ldots)$ などに対しては成り立たないので，T は paranormal 作用素ではない．

また，T が convexoid 作用素でないことは次のようにしてわかる．$\overline{W(T)}$ は一点 1 と中心が 0 で半径 $\frac{1}{2}$ の閉円盤によって生成される閉凸集合であり，さらに $\sigma(T) = \{0, 1\}$ なので，$\mathrm{co}\,\sigma(T) = [0, 1] \subsetneqq \overline{W(T)}$ である．　□

Example 2. paranormal ではないが, normaloid, convexoid である作用素.
T を次のような行列とする．

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \qquad \text{ただし } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

また，N はその spectrum が単位円盤 $\overline{D}$ であるような normal 作用素とする．

このとき,

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \overline{D} = \overline{D}, \qquad \overline{W(T)} = \mathrm{co}(W(M) \cup W(N)) = \overline{D}$$

より, T は convexoid 作用素である. また, $\|T\| = r(T) = 1$ なので T は normaloid 作用素である. しかし, 単位ベクトル $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$ に対して $Te_1 = e_2$, $T^2 e_1 = 0$ なので T は paranormal 作用素ではない. □

Example 3. hyponormal ではないが, paranormal, convexoid である作用素.

T を次のような無限次元行列とする.

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & C^{\frac{1}{2}} & \boxed{0} & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ただし, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし, $\boxed{0}$ は行列の (0, 0) 成分を表すものとする. このとき,

$$T^2 = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & C & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & C & 0 & \boxed{0} & 0 & \\ & 0 & 0 & C & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}} & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & D & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

$D \geq C$, $D^2 \not\geq C^2$ (§3.2.1 の Example 1 参照) なので, T は hyponormal 作用素であるが T^2 は hyponormal 作用素でない. しかし, §2.6.2 の Theorem 1 と §2.6.1 の Theorem 2 の (i) より T^2 は paranormal 作用素である.

次に，この T^2 が convexoid 作用素であることを示す．

2 次元空間 E 上の正値作用素 D の固有値は $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ である．ここで，$\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ とおくと，$\|T\| = \sqrt{\mu}$, $\|T^2\| = \mu$ である．また，$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ を固有値 μ に対する固有ベクトル，$\psi = (\varphi_1, 0)$, $0 = (0,0)$ とする．T は直和空間 $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} E_n$ (各 E_n は E と同型) 上の作用素であると考えられることに注意し，次のような $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} E_n$ 上のベクトル Φ を考える．任意の $1 < |\lambda| < \mu$ なる複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\Phi = \left(\ldots, 0,\ \frac{1}{\lambda^3}\psi,\ 0,\ \frac{1}{\lambda^2}\psi,\ 0,\ \frac{1}{\lambda}\psi,\ \boxed{0},\ \psi,\ 0,\ \frac{\lambda}{\mu}\varphi,\ 0,\ \frac{\lambda^2}{\mu^2}\varphi,\ 0,\ \frac{\lambda^3}{\mu^3}\varphi,\ 0, \ldots \right).$$

ここで，各々の成分は E_n $(-\infty < n < \infty)$ 上のベクトルであり，$\boxed{0}$ は第 0 成分を表す．すると，$T^{*2}\Phi = \lambda\Phi$ となり，任意の $1 < |\lambda| < \mu$ なる複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ は $\sigma(T^2)$ に含まれるので，

$$\mathrm{co}\,\sigma(T^2) = \{z : |z| \leq \mu\}$$

となる．よって，$w(T^2) = \|T^2\| = \mu$ より $\overline{W(T^2)}$ はこの円盤上に含まれることとあわせると，$\overline{W(T^2)} = \mathrm{co}\,\sigma(T^2)$, つまり T^2 が convexoid 作用素であることがわかる． □

§2.7.1 の Corollary 5 より，任意の hyponormal 作用素は convexoid 作用素であるが，“任意の paranormal 作用素は convexoid 作用素であるか”という命題に否定的な解答を与えるのが次の例である．

Example 4. convexoid ではないが，paranormal である作用素．

無限次元行列 U, P を次のように定める．なお，この作用素 U は **unilateral shift** (片側シフト) とよばれる．

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

この U, P を使って，$H \oplus H$ $(H = l^2)$ 上の作用素 T を $T = \begin{pmatrix} U+I & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と定める．すると，任意の $z \in H$ に対して

$$(1) \qquad \|T^*(z \oplus 0)\|^2 = \|(U^* + I)z\|^2 + \|Pz\|^2$$
$$= \|(U + I)z\|^2 = \|T(z \oplus 0)\|^2.$$

よって，$z = (U + I)x + Py$ のとき $T(x \oplus y) = z \oplus 0$ であることに注意すると，任意の $\|x \oplus y\| = 1$ であるベクトル $x \oplus y \in H \oplus H$ に対して

$$\begin{aligned}\|T(x \oplus y)\|^2 &= (T^*T(x \oplus y), x \oplus y)\\ &\le \|T^*T(x \oplus y)\| \qquad \text{(Schwarz の不等式より)}\\ &= \|T^*(z \oplus 0)\|\\ &= \|T(z \oplus 0)\| \qquad \text{((1) より)}\\ &= \|T^2(x \oplus y)\|\end{aligned}$$

なので，T は paranormal 作用素である．

次に，T が convexoid 作用素でないことを示す．

$$x = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right), \qquad y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \ldots\right)$$

とおくと $\|x \oplus y\| = 1$ である．このとき，

$$W(T) \ni (T(x \oplus y), x \oplus y) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} < 0.$$

また，$r(U) \le \|U\| = 1$ より $\sigma(U) \subseteq D$ なので，

$$\sigma(T) = \sigma(U + I) \cup \{0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \le 1\}.$$

よって，$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \notin \mathrm{co}\,\sigma(T)$ なので T は convexoid 作用素ではない．　□

Remark 1. 作用素 U を unilateral shift とする．このとき，$U^*U = I, UU^* \le I$ なので U は isometry 作用素である．よって，U は quasinormal 作用素である．また，U の spectrum に関しては，$\sigma(U) = D$ (閉単位円盤)，$P_\sigma(U) = \emptyset$，$A_\sigma(U) = C$ (単位円)，$\Gamma(U) = D - C$ (単位円の内部) であることが知られている．

§2.7.3 非正規作用素の包含関係を示す図

§2.6.2 の Theorem 1, §2.7.1 の Theorem 1, Theorem 3, Theorem 4 で得られた結果をまとめると下図のようになる.

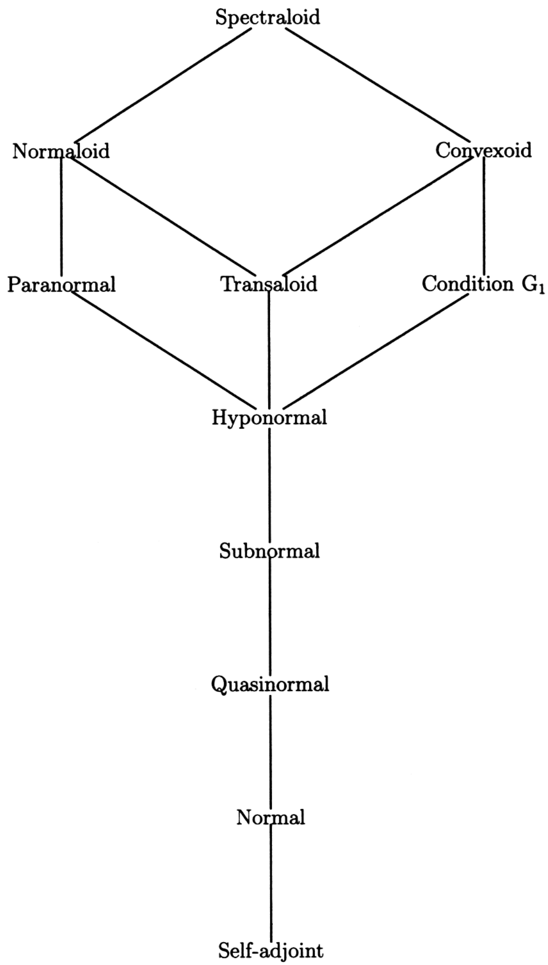


Figure 19 §2.7 の Definition 1 に関するメモ.

§2.7 に関するメモ・注釈・参考文献

T.Ando (unpublished, 1974).

S.K.Berberian *Conditions on an operator implying* Re $\sigma(T) = \sigma(\mathrm{Re}\, T)$, Trans. Amer. Math. Soc., **154**(1971), 267–272.

T.Furuta

[1] *On the class of paranormal operators*, Proc. Japan Acad., **43**(1967), 594–598.

[2] *Some characterizations of convexoid operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **18**(1973), 893–900.

[3] *Relations between generalized growth conditions and several classes of convexoid operators*, Canad. J. Math., **29**(1977), 1010–1030.

T.Furuta and R.Nakamoto *On the numerical range of an operator*, Proc. Japan Acad., **47**(1971), 279–284.

K.Gustafson and D.Rao (unpublished, 1985).

P.R.Halmos *Hilbert Space Problem Book*, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.

I.Nishitani and Y.Watatani *Some theorems on paranormal operators*, Math. Japon., **21**(1976), 123–126.

S.Ohshiro *Master thesis at Jooetsu University*, 1996.

G.Orland *On a class of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **15**(1964), 75–79.

C.R.Putnam

[1] *On the spectra of semi-normal operators,* Trans. Amer. Math. Soc., **119**(1965), 509–523.

[2] *An inequality for the area of hyponormal spectra,* Math. Z., **116**(1970), 323–330.

D.K.Rao *Operadores paranormales*, Rev. Colombiana Mat., **21**(1987), 135–139.

T.Saito and T.Yoshino *On a conjecture of Berberian*, Tohoku Math. J., **17** (1965), 147–149.

convexoid 作用素の概念は [Halmos 1967] の Chapter 17 で導入されている．また，convexoid, spectraloid という言葉も [Halmos 1967] の Chapter 17 で導入されている．

§2.7.1 で述べた convexoid 作用素の特徴づけについて，Theorem 1 は [Furuta-Nakamoto 1971], [Furuta 1973], Theorem 2 は [Orland 1964] で示された．また，Corollary 5 の (i) は [Saito-Yoshino 1965] でも示されている．

§2.7.1 の (3) は非正規作用素を考察するのにとても意義のあるものである．例えば，$\sigma(T)$ の 2 次元平面での面積が 0 である hyponormal 作用素 T (T^* が hyponormal でもよい) は normal 作用素であることを示した [Putnam 1965] や [Putnam 1970] の中で，(3) は重要な役割を果たしている．また，[Berberian 1971] ではこの結果の簡単な証明を与えるだけでなく，Toeplitz 作用素や spectroid 作用素 (これらに関する説明は省略) などが (3) を満たすことも示している．

(3) と関連した convexoid 作用素の特徴づけである §2.7.1 の Theorem 6 は，[Berberian 1971] で得られた §2.7.1 の Theorem 7 の簡単な別証をも与えている．これらのことについては [Furuta 1973] で述べられている．

§2.7.2 の Example 1, Example 2 は [Furuta 1967], Example 3 は [Halmos 1967] で示された．

[Furuta 1967] で提起された “任意の paranormal 作用素は convexoid 作用素であるか” という問題に対する反例は, [Ando 1974], [Nishitani-Watatani 1976], [Gustafson-Rao 1985], [Rao 1987] によって与えられた．ここでは，§2.7.2 の Example 4 で [Nishitani-Watatani 1976] をやさしく改良した [Ohshiro 1996] の反例を紹介している．

なお, convexoid 作用素のより精密な特徴づけとそれらに関する例については [Furuta 1977] で与えられている．

本章の終わりに，§2.2.1 と §2.7.3 の 2 つの図をまとめたものと，本章で扱った作用素のクラスをまとめた表を載せておく．

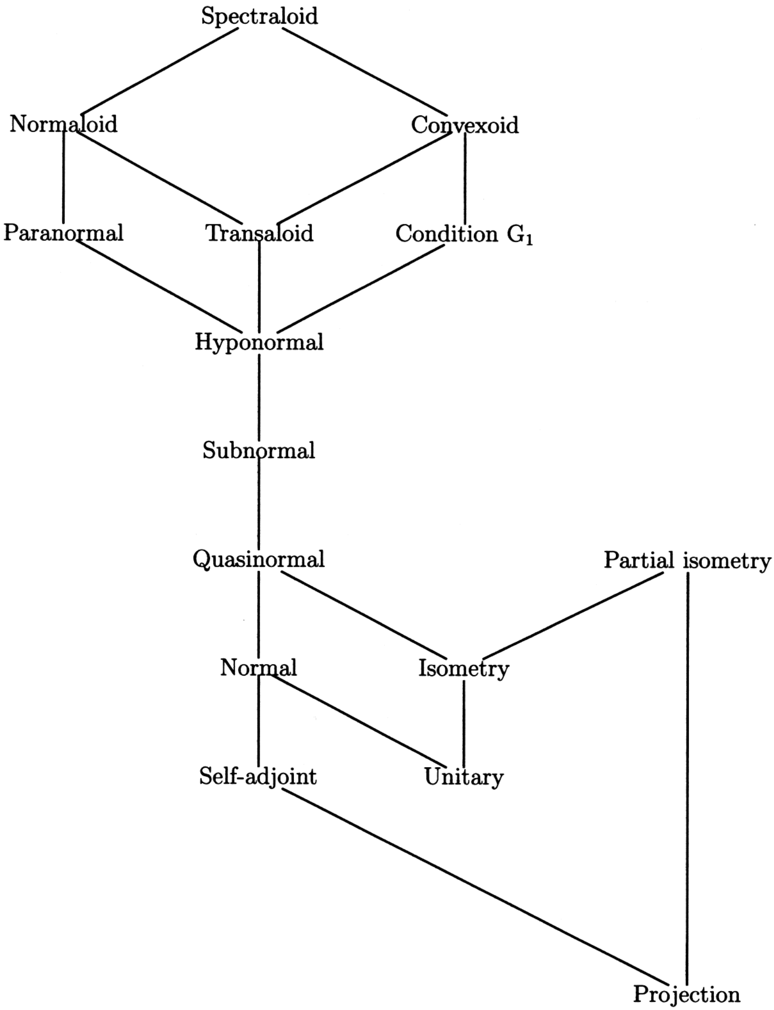


Figure 20 §2.5, §2.6, §2.7 に関する定義.

作用素のクラス

T: ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素.
$W(T)$ (T の numerical range): $W(T) = \{(Tx, x) : x \in H, \|x\| = 1\}$.
$w(T)$ (T の numerical radius): $w(T) = \sup |W(T)|$.
$r(T)$ (T の spectral radius): $r(T) = \sup |\sigma(T)|$,

(ただし $\sigma(T)$ は T の spectrum)

クラス	定　義
Spectraloid	$w(T) = r(T)$.
Convexoid	$\overline{W(T)} = \mathrm{co}\,\sigma(T)$ ($\sigma(T)$ の凸包).
Normaloid	$\|T\| = r(T)$.
Condition G_1	任意の $\mu \notin \sigma(T)$ に対して $\|(T-\mu)^{-1}\| = \dfrac{1}{d(\mu, \sigma(T))}$.
Transaloid	任意の複素数 $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $T - \mu$ が normaloid 作用素.
Paranormal	任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して $\|T^2 x\| \geq \|Tx\|^2$.
Hyponormal	$T^*T \geq TT^*$.
Subnormal	T は normal extension をもつ.
Quasinormal	T と T^*T が可換.
Normal	$T^*T = TT^*$.
Partial isometry	$T = TT^*T$.
Isometry	$T^*T = I$.
Unitary	$T^*T = TT^* = I$.
Self-adjoint	$T^* = T$.
Projection	$T^* = T$ かつ $T^2 = T$ を満たす ($T = T^*T$ と同値).

3

有界線形作用素に関するさらなる発展

§3.1　Young の不等式と Hölder-McCarthy の不等式

§3.1.1　Young の不等式と一般化作用素平均

Theorem Y (Young (ヤング) の不等式). A, B をヒルベルト空間上の可逆な正値作用素とする．このとき $0 \leq \lambda \leq 1$ について次の不等式が成り立つ．

$$\text{(Y)} \qquad (1-\lambda)A + \lambda B \geq A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^{\lambda}A^{\frac{1}{2}}$$
$$\geq [(1-\lambda)A^{-1} + \lambda B^{-1}]^{-1}.$$

Proof. $\lambda \in [0,1]$ に対して，正の実数 x についての関数 $f(x) = \lambda x + 1 - \lambda - x^{\lambda}$ を考えると，$f(x)$ は非負の値をとる．standard operational calculus により，正値作用素 T と実数 $\lambda \in [0,1]$ について

$$\text{(1)} \qquad \lambda T + 1 - \lambda \geq T^{\lambda} \geq (\lambda T^{-1} + 1 - \lambda)^{-1}$$

が成り立つ．実際，1 番目の不等号において T を T^{-1} に置き換えて，さらに両辺の逆をとることにより，2 番目の不等号が得られる．(1) で $T = A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}}$ とおいて，さらに両辺に両側から $A^{\frac{1}{2}}$ をかけることにより (Y) が得られる．□

Theorem Y は作用素の一般化算術平均，一般化幾何平均，一般化調和平均を比較している．

Theorem 1. T をヒルベルト空間上の可逆な正値作用素とする．このとき次が成り立ち，これらは互いに同値である．

(i) $1 \geq \lambda \geq 0$ のとき $\lambda T + (1-\lambda) \geq T^{\lambda}$.

(ii) $\lambda > 1$ のとき $\lambda T + (1-\lambda) \leq T^{\lambda}$.

(iii) $\lambda < 0$ のとき $\lambda T + (1-\lambda) \leq T^{\lambda}$.

Proof. (i) はすでに (1) で得られており，(ii), (iii) も同様の方法で簡単に得ることができる．以下，(i), (ii), (iii) の同値性を示す．

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii). $\lambda > 1$ とする．(i) は

$$T^{\frac{1}{\lambda}} \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right) T + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right),$$

すなわち

$$\lambda T^{\frac{1}{\lambda}} \leq T + (\lambda - 1)$$

と同値である．$S = T^{\frac{1}{\lambda}}$ とおくことにより

$$S^{\lambda} \geq \lambda S + (1-\lambda)$$

を得る．このように (i) から (ii) が導かれるが，同様にして (ii) から (i) が導かれる．

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). (ii) の両辺に両側から $T^{\frac{-1}{2}}$ をかけることにより，任意の $\lambda > 1$ について

$$\lambda + (1-\lambda)T^{-1} \leq T^{\lambda-1}$$

が成り立つ．$\mu = 1 - \lambda < 0$, $S = T^{-1}$ とおくことにより

$$\mu S + (1-\mu) \leq S^{\mu}$$

を得る．このように (ii) から (iii) が導かれるが，同様にして (iii) から (ii) が導かれる． □

Theorem 2. A, B をヒルベルト空間上の可逆な正値作用素とする．このとき次が成り立ち，これらは互いに同値である．

(i) $1 \geq \lambda \geq 0$ のとき $(1-\lambda)A + \lambda B \geq A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\lambda} A^{\frac{1}{2}}$.

(ii) $\lambda > 1$ のとき $(1-\lambda)A + \lambda B \leq A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\lambda} A^{\frac{1}{2}}$.

(iii) $\lambda < 0$ のとき $(1-\lambda)A + \lambda B \leq A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\lambda} A^{\frac{1}{2}}$.

Proof. Theorem 1 において $T = A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}$ とおき，さらに両辺の両側から $A^{\frac{1}{2}}$ をかければよい． □

§3.1.2 Hölder-McCarthy の不等式

Theorem H-M (Hölder-McCarthy (ヘルダー–マッカーシー) の不等式). A をヒルベルト空間 H 上の正値作用素とする．このときに次が成り立つ．

(i) 任意の $\lambda > 1$ と任意の単位ベクトル x について

$$(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda.$$

(ii) 任意の $\lambda \in [0,1]$ と任意の単位ベクトル x について

$$(A^\lambda x, x) \leq (Ax, x)^\lambda.$$

(iii) A が可逆のとき，任意の $\lambda < 0$ と任意の単位ベクトル x について

$$(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda.$$

さらに，(i), (ii), (iii) は次の (i)′, (ii)′, (iii)′ とそれぞれ同値である．

(i)′ 任意の $\lambda > 1$ と任意のベクトル x について

$$(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda \|x\|^{2(1-\lambda)}.$$

(ii)′ 任意の $\lambda \in [0,1]$ と任意のベクトル x について

$$(A^\lambda x, x) \leq (Ax, x)^\lambda \|x\|^{2(1-\lambda)}.$$

(iii)′ A が可逆のとき，任意の $\lambda < 0$ と任意のベクトル x について

$$(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda \|x\|^{2(1-\lambda)}.$$

Proof. (ii) $\alpha, \beta \in [0,1]$ のとき成り立つと仮定する．作用素の連続性より，このとき (ii) が $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のときも成り立つことを示せばよい．実際，任意の単位ベクトル x について

$$\begin{aligned}
|(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} x, x)|^2 &= |(A^{\frac{\alpha}{2}} x, A^{\frac{\beta}{2}} x)|^2 \\
&\leq (A^\alpha x, x)(A^\beta x, x) && \text{(Schwarz の不等式より)} \\
&\leq (Ax, x)^\alpha (Ax, x)^\beta && \text{(仮定より)} \\
&\leq (Ax, x)^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

よって $(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} x, x) \leq (Ax, x)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ である．

(i) $\lambda > 1$ とする．このとき $\dfrac{1}{\lambda} \in [0,1]$ であるので，任意の単位ベクトル x について，(ii) より

$$(Ax,x) = (A^{\lambda \frac{1}{\lambda}}x,x) \le (A^{\lambda}x,x)^{\frac{1}{\lambda}},$$

すなわち $(A^{\lambda}x,x) \ge (Ax,x)^{\lambda}$ である．

(iii) A^{-1} が存在するとき，任意の単位ベクトル x について

$$\begin{aligned} 1 = \|x\|^4 &= |(A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{-1}{2}}x)|^2 \\ &\le \|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 \|A^{\frac{-1}{2}}x\|^2 \\ &= (Ax,x)(A^{-1}x,x), \end{aligned}$$

よって

(1)　　任意の単位ベクトル x について　$(A^{-1}x,x) \ge (Ax,x)^{-1}$.

(iii-a) $\lambda < -1$ の場合．任意の単位ベクトル x について

$$\begin{aligned} (A^{\lambda}x,x) &= (A^{-|\lambda|}x,x) \\ &\ge (A^{-1}x,x)^{|\lambda|} \qquad (|\lambda| > 1 \text{ から (i) より}) \\ &\ge (Ax,x)^{-|\lambda|} \qquad ((1) \text{ より}) \\ &= (Ax,x)^{\lambda}. \end{aligned}$$

(iii-b) $-1 \le \lambda < 0$ の場合．任意の単位ベクトル x について

$$\begin{aligned} (A^{\lambda}x,x) &= (A^{-|\lambda|}x,x) \\ &\ge (A^{|\lambda|}x,x)^{-1} \qquad ((1) \text{ より}) \\ &\ge (Ax,x)^{-|\lambda|} \\ &= (Ax,x)^{\lambda}. \end{aligned}$$

最後の不等号は $|\lambda| \in (0,1]$ から (ii) と両辺の逆数をとることによる．

(i) $\Longleftrightarrow$ (i)$'$，(ii) $\Longleftrightarrow$ (ii)$'$，(iii) $\Longleftrightarrow$ (iii)$'$ は明らかである．　□

§3.1.3　ヒルベルト空間上の作用素に関する Hölder-McCarthy と Young の不等式は同値である

ヒルベルト空間 H 上の正値作用素 A と $\lambda \in [0,1]$ について，次の 2 つの不等式の同値性の簡潔な証明を与える

(1) **Hölder-McCarthy の不等式**:

$$\text{任意の単位ベクトル } x \in H \text{ について } (Ax,x)^\lambda \geq (A^\lambda x,x).$$

(2) **Young の不等式**: $\lambda A + I - \lambda \geq A^\lambda.$

Proof. 正の実数 x と $\lambda \in [0,1]$ について $f(x) = \lambda x + 1 - \lambda - x^\lambda$ を考える．このとき，$f(x)$ は最小値 $f(1) = 0$ である非負凸関数であることが容易にわかり，よって

(*) 正の実数 a と $\lambda \in [0,1]$ について $\lambda a + 1 - \lambda \geq a^\lambda$.

(1) $\Longrightarrow$ (2). (*) で a を $(Ax,x) \geq 0$ に置き換えることにより，単位ベクトル x と $\lambda \in [0,1]$ について

$$\begin{aligned}\lambda(Ax,x) + 1 - \lambda &\geq (Ax,x)^\lambda \\ &\geq (A^\lambda x,x) \qquad ((1) \text{ より}).\end{aligned}$$

よって (2) が得られた．

(2) $\Longrightarrow$ (1). $\lambda \in (0,1]$ とする．正の実数 k について，(2) で A を $k^{\frac{1}{\lambda}}A$ に置き換えることにより，単位ベクトル x について

(3) $$\lambda k^{\frac{1}{\lambda}}(Ax,x) + 1 - \lambda \geq k(A^\lambda x,x).$$

ここで $(Ax,x) \neq 0$ のとき，(3) で $k = (Ax,x)^{-\lambda}$ とおくことにより

$$\lambda(Ax,x)^{-1}(Ax,x) + 1 - \lambda \geq (Ax,x)^{-\lambda}(A^\lambda x,x),$$

よって

$$(Ax,x)^\lambda \geq (A^\lambda x,x),$$

すなわち (1) が得られた．

次に $(Ax,x) = 0$ ならば $A^{\frac{1}{2}}x = 0$ であり，A の連続性と帰納法により $\lambda \in (0,1]$ について $A^\lambda x = 0$ であるので，よって (1) は明らかに成り立つ． □

Remark 1. よく知られていることであるが，§3.1.1 で述べたように (2) は (*) から standard operational calculus により導かれることを確認しておく．

§3.1 に関するメモ・注釈・参考文献

T.Furuta *The Hölder-McCarthy and Young inequalities are equivalent for Hilbert space operators*, to appear in Amer. Math. Monthly, 2000.

T.Furuta and M.Yanagida *Generalized means and convexity of inversion for positive operators*, Amer. Math. Monthly, **105**(1998), 258–259.

K.Kitamura and Y.Seo *Inequalities for the Hadamard product of operators*,

preprint.

C.A.McCarthy C_p, Israel J. Math., **5**(1967) 249–271.

M.H.Moore *A convex matrix function*, Amer. Math. Monthly, **80**(1973), 408–409.

D.Wang *A convex operator function*, Internat. J. Math. Math. Sci., **11**(1988), 401–402.

T.Yamazaki Private memo (unpublished).

[Moore 1973] による結果の拡張として，[Wang 1988] は逆をとるという関数が，ヒルベルト空間上の可逆な正値作用素全体の集合上における凸関数であることを表す次の結果を示した．

> A, B をヒルベルト空間上の可逆な正値作用素とする．このとき，$0 \leq \lambda \leq 1$ について
>
> $$[(1-\lambda)A + \lambda B]^{-1} \leq (1-\lambda)A^{-1} + \lambda B^{-1}$$
>
> が成り立つ．

§3.1.1 で紹介した Theorem 1 の構成的な証明は [Furuta-Yanagida 1998] によるものであり，Theorem Y (Young の不等式) の (Y) で両辺の逆をとることにより上記の結果が得られる．

§3.1.2 の Theorem H-M (Hölder-McCarthy の不等式) は作用素論においてとても有用であり，[McCarthy 1967] による Theorem H-M の (i), (ii) のオリジナルの証明は正値作用素 A の積分表現と数の場合の Hölder の不等式を用いている．

§3.1.2 の Theorem H–M の (ii) の見事な証明は，[Kitamura-Seo] と [Yamazaki] により独立に与えられている．

§3.1.3 は [Furuta 2000] による．

§3.2 Löwner-Heinz の不等式と Furuta 不等式

§3.2.1 3 つの順序を保存する作用素不等式の簡潔な証明

最初に 1934 年に確立された有名な Löwner-Heinz の不等式を紹介する.

> **Theorem L-H (Löwner-Heinz (レウナー–ハインツ) の不等式).**
> $A \geq B \geq 0$ ならば, 任意の $\alpha \in [0,1]$ について $A^\alpha \geq B^\alpha$ が成り立つ.

Proof. (i) $A \geq B > 0$ の場合. ある $\alpha, \beta \in [0,1]$ について $A^\alpha \geq B^\alpha, A^\beta \geq B^\beta$ が成り立つとする. 作用素の連続性から $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ であることを示せばよい.

$$\begin{aligned}
\|A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}}\| &= r(A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}}) \\
&\qquad (r(X) \text{ は } X \text{ の spectral radius を表す}) \\
&= r(A^{\frac{\alpha-\beta}{4}} A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-(\alpha+\beta)}{4}} A^{\frac{\beta-\alpha}{4}}) \qquad (r(ST) = r(TS) \text{ より}) \\
&= r(A^{\frac{-\beta}{2}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-\alpha}{2}}) \\
&\leq \|A^{\frac{-\beta}{2}} B^{\frac{\alpha+\beta}{2}} A^{\frac{-\alpha}{2}}\| \\
&\leq \|A^{\frac{-\beta}{2}} B^{\frac{\beta}{2}}\| \, \|B^{\frac{\alpha}{2}} A^{\frac{-\alpha}{2}}\| \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

上式の最後の不等号は $A^\alpha \geq B^\alpha, A^\beta \geq B^\beta$ より導かれる. したがって $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ が得られた.

(ii) 一般の $A \geq B \geq 0$ の場合. $A \geq B \geq 0$ より任意の $\varepsilon > 0$ について $A + \varepsilon \geq B + \varepsilon > 0$ である. §2.4.1 の Corollary 3 より, $A_\varepsilon = A + \varepsilon, B_\varepsilon = B + \varepsilon$ はともに可逆である. よって, (i) より, 任意の $\alpha \in [0,1]$ について $A_\varepsilon^\alpha \geq B_\varepsilon^\alpha$ が成り立ち, $\varepsilon \to 0$ とすることにより $A^\alpha \geq B^\alpha$ を得る. □

この Löwner-Heinz の不等式の簡単な系として, 次の結果がよく知られている.

> **Corollary 1.** 任意の実数 $\alpha > 1$ について, $A \geq B \geq 0$ であったとしても, 必ずしも $A^\alpha \geq B^\alpha$ は成り立たない.

Proof 1. 簡単な例として, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ をとる. このとき $A \geq B \geq$

0 であり，また A は次のように分解される．

$$A=\begin{pmatrix}-a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1 & 0\\ 0 & t_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a & b\\ b & a\end{pmatrix}.$$

ここで t_1, t_2 は A の固有値であり $t_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, t_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，また $a=\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$ である．そこで $F(\alpha)$ を次のように定義する．

$$F(\alpha)=A^\alpha-B^\alpha=\begin{pmatrix}a^2t_1^\alpha+b^2t_2^\alpha-1 & -abt_1^\alpha+abt_2^\alpha\\ -abt_1^\alpha+abt_2^\alpha & b^2t_1^\alpha+a^2t_2^\alpha\end{pmatrix}.$$

$\alpha>1$ のとき，$F(\alpha)$ の固有値の一つが負であることを示せばよい．$g(\alpha)$ を $F(\alpha)$ の行列式の値とすると

$$\begin{aligned}g(\alpha)&=(a^2t_1^\alpha+b^2t_2^\alpha-1)(b^2t_1^\alpha+a^2t_2^\alpha)-(abt_1^\alpha-abt_2^\alpha)^2\\ &=1-(b^2t_1^\alpha+a^2t_2^\alpha).\end{aligned}$$

$\alpha>1$ のとき

$$\begin{aligned}g'(\alpha)&=-(a^2t_2^{2\alpha}-b^2)\frac{\log t_2}{t_2{}^\alpha}\\ &<-(a^2t_2^2-b^2)\frac{\log t_2}{t_2{}^\alpha} \qquad (\alpha>1 \text{ より})\\ &=-(5+3\sqrt{5})\frac{\log t_2}{10t_2{}^\alpha}<0 \qquad (t_2>1 \text{ より}).\end{aligned}$$

$g(1)=0$ であり，$\alpha>1$ のとき $g'(\alpha)<0$ であるので，よって $\alpha>1$ のとき $g(\alpha)<0$ である．すなわち $\alpha>1$ のとき $F(\alpha)\not\geq 0$ であり，つまり $A^\alpha\not\geq B^\alpha$ である． □

Proof 2. まず次の結果を紹介する．

Example 1. $A\geq B\geq 0$ であるが $A^2\not\geq B^2$ であるような A, B が存在する．

A, B として，Proof 1. と同じように $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ をとる．このとき $A\geq B\geq 0$ であるが $A^2-B^2=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$，よって $A^2\not\geq B^2$ である． □

Corollary 1 の否定として，次を仮定する．

$$\text{ある実数 } \alpha>1 \text{ について，} A\geq B\geq 0 \text{ ならば } A^\alpha\geq B^\alpha.$$

$\alpha>1$ より $\alpha^n\geq 2$ となるような自然数 n が存在するが，上の不等式を繰り返し適用することにより $A^{\alpha^n}\geq B^{\alpha^n}$ が成り立つ．$\dfrac{2}{\alpha^n}\in[0,1]$ であるから，Löwner-Heinz の不等式より，この不等式の両辺を $\dfrac{2}{\alpha^n}$ 乗することによって $A^2\geq B^2$ を得る．しかし，

Example 1 より $A \geq B \geq 0$ であるが $A^2 \not\geq B^2$ であるような A, B が存在するので，よって矛盾であり，Corollary 1 が証明された． □

Theorem F (Furuta (古田) 不等式). $A \geq B \geq 0$ ならば，各 $r \geq 0$ について

(i) $$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}}B^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

(ii) $$(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

が $(1+r)q \geq p+r$ を満たすような任意の $p \geq 0, q \geq 1$ について成り立つ．

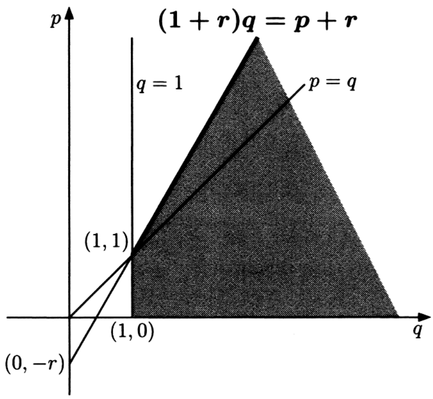


Figure 21 Theorem F のパラメータの領域.

Lemma A. X を可逆な正値作用素，Y を可逆な作用素とする．任意の実数 λ について

$$(YXY^*)^\lambda = YX^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}Y^*YX^{\frac{1}{2}})^{\lambda-1}X^{\frac{1}{2}}Y^*$$

が成り立つ．

Proof. $YX^{\frac{1}{2}} = UH$ を $YX^{\frac{1}{2}}$ の極分解とする．ここで U は unitary であり $H = |YX^{\frac{1}{2}}|$ である．よって

$$\begin{aligned}(YXY^*)^\lambda = (UH^2U^*)^\lambda &= YX^{\frac{1}{2}}H^{-1}H^{2\lambda}H^{-1}X^{\frac{1}{2}}Y^* \\ &= YX^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}Y^*YX^{\frac{1}{2}})^{\lambda-1}X^{\frac{1}{2}}Y^*.\end{aligned}$$ □

Proof of Theorem F. まず(ii)を証明する．$1 \geq p \geq 0$ の場合は Theorem L-H から明らかであるので，よって $p \geq 1$ の場合を示せばよい．さらに $q = \dfrac{p+r}{1+r} \geq 1$ の場合を示せば，$q > \dfrac{p+r}{1+r}$ の場合は Theorem L-H より導かれる．以上をまとめると，次を示せばよいことになる．

(1)　　任意の $p \geq 1$, $r \geq 0$ について $A^{1+r} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$.

一般性を失うことなく，A, B を可逆であると仮定してよい．$r \in [0,1]$ の場合，Theorem L-H より $A \geq B \geq 0$ ならば $A^r \geq B^r$ である．よって

$$
\begin{aligned}
(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} &= A^{\frac{r}{2}} B^{\frac{p}{2}} (B^{\frac{-p}{2}} A^{-r} B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{p-1}{p+r}} B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{r}{2}} \qquad (\text{Lemma A より})\\
&\leq A^{\frac{r}{2}} B^{\frac{p}{2}} (B^{\frac{-p}{2}} B^{-r} B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{p-1}{p+r}} B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{r}{2}}\\
&= A^{\frac{r}{2}} B A^{\frac{r}{2}} \leq A^{1+r}.
\end{aligned}
$$

最初の不等号は $\dfrac{p-1}{p+r} \in [0,1]$ であるので $B^{-r} \geq A^{-r}$ と Theorem L-H より成り立ち，最後の不等号は $A \geq B \geq 0$ より成り立つ．よって次の(2)を得た．

(2)　　任意の $p \geq 1$, $r \in [0,1]$ について $A^{1+r} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$.

$A_1 = A^{1+r}$, $B_1 = (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$ とおくと，(2)より $A_1 \geq B_1 \geq 0$ であるので，ここで A_1, B_1 に対して(2)を再び適用する．すると，任意の $p_1 \geq 1$, $r_1 \in [0,1]$ について

$$A_1^{1+r_1} \geq (A_1^{\frac{r_1}{2}} B_1^{p_1} A_1^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{1+r_1}{p_1+r_1}}$$

が成り立つ．さらに $p_1 = \dfrac{p+r}{1+r} \geq 1$, $r_1 = 1$ とおくことにより

(3)　任意の $p \geq 1, r \in [0,1]$ について $A^{2(1+r)} \geq (A^{r+\frac{1}{2}} B^p A^{r+\frac{1}{2}})^{\frac{2(1+r)}{p+2r+1}}$.

ここで $\dfrac{s}{2} = r + \dfrac{1}{2}$ とおくと，$2(1+r) = 1+s$ より $\dfrac{2(1+r)}{p+2r+1} = \dfrac{1+s}{p+s}$ であるので，(3)は次のように書き換えられる．

(4)　　任意の $p \geq 1$, $s \in [1,3]$ について $A^{1+s} \geq (A^{\frac{s}{2}} B^p A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1+s}{p+s}}$.

$r \in [0,1]$, $s \in [1,3]$ であるので，(2), (4)をあわせることにより，(2)は $r \in [0,3]$ について成り立つことがわかった．この過程を繰り返すことにより，(ii)は証明された．

次に，$A \geq B > 0$ ならば $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$ であるので，(ii)より，各 $r \geq 0$ について $B^{\frac{-(p+r)}{q}} \geq (B^{\frac{-r}{2}} A^{-p} B^{\frac{-r}{2}})^{\frac{1}{q}}$ が $(1+r)q \geq p+r$ を満たすような任意の $p \geq 0, q \geq 1$ について成り立つ．この式の両辺の逆をとることにより，(i)が得られる．これで Theorem F が証明された．　□

Remark 1. 作用素不等式の研究において Theorem L-H は非常に有用であるが，Corollary 1 で示したように α の範囲は $\alpha \in [0,1]$ に限られており，これでは作用素変換や作用素不等式の過程において適用するのに制限が強すぎた．本書を通して Theorem F の数多くの応用を学べば，読者にも Theorem F の有効性を理解していただけるであろう．

Remark 2. Theorem F の証明の最後の部分で示したとおり，Theorem F において (i) と (ii) は同値である．

パラメータ p, q, r の領域は Figure 21 に示してあるが，この領域が Theorem F について best possible (最良) であること，すなわちこの領域をこれ以上拡げることができないことが，Tanahashi による巧みで困難な証明によって示されている (§3.2.2 や §3.2 に関するメモ・注釈・参考文献を参照)．

Remark 3. その証明から明らかなように，Lemma A において $\lambda \geq 1$ の場合には X, Y の可逆性は不要である．Lemma A はその証明とともにとても単純ではあるが，作用素の式の変形においてじつに便利な道具であり，このことは本書を通して理解できるであろう．

Theorem $\mathbf{F_1}$. $A \geq B \geq 0$ ならば

(i) $$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq B^{1+r}$$

(ii) $$A^{1+r} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$$

が任意の $p \geq 1$, $r \geq 0$ について成り立つ．

Proof. Theorem F において，$p \geq 1$, $r \geq 0$ の場合に $q = \dfrac{p+r}{1+r} \geq 1$ とおけばよい． □

Remark 4. Theorem F の $p \in [0,1]$ の場合は Theorem L-H より明らかであるので，Theorem F_1 は Theorem F の本質的な部分であり，以下の節でこの Theorem F_1 の応用をいくつか紹介する．

次に，Theorem F は次の Theorem F′ と同値であることを示そう．

Theorem F′. $A \geq C \geq B \geq 0$ ならば，各 $r \geq 0$ について

$$(\star) \qquad (C^{\frac{r}{2}}A^pC^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (C^{\frac{r}{2}}C^pC^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (C^{\frac{r}{2}}B^pC^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

が $(1+r)q \geq p+r$ を満たすような任意の $p \geq 0$, $q \geq 1$ について成り立つ．

Theorem F と Theorem F′ の同値性の証明.

Theorem F $\Longrightarrow$ Theorem F′．$(\star)$ の 1 番目の不等号は Theorem F の (i) から，2 番目の不等号は Theorem F の (ii) から導かれる．

Theorem F′ $\Longrightarrow$ Theorem F．Theorem F′ の $(\star)$ において $B = C$ とおくことによって Theorem F の (i) が，$A = C$ とおくことによって Theorem F の (ii) が導かれる．

以上で Theorem F と Theorem F′ の同値性が示された． □

Theorem F′ より次の同値関係が得られる．

Theorem F″. $A \geq C \geq B \geq 0$ であるための必要十分条件は

$$(\clubsuit) \qquad (C^{\frac{r}{2}}A^pC^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (C^{\frac{r}{2}}C^pC^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (C^{\frac{r}{2}}B^pC^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

が $(1+r)q \geq p+r$ を満たすようなすべての $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ について成り立つことである．

Proof. 必要条件であることは Theorem F′ より導かれ，また十分条件であることは $(\clubsuit)$ において $r = 0$, $p = q = 1$ とおくことによって導かれる． □

なお，Theorem F″ は，$A \geq B \geq 0$ のとき $A \geq C \geq B \geq 0$ を満たすような $C \geq 0$ の，$(\clubsuit)$ による特徴づけを与えていることに注意する．

Theorem G (一般化 Furuta 不等式). $A \geq B \geq 0$ かつ $A > 0$ ならば，$t \in [0,1]$, $p \geq 1$ について

(G-1) $$A^{1-t+r} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}$$

が $s \geq 1$, $r \geq t$ について成り立つ．

Proof. B は可逆であると仮定してもよい．最初に，$A \geq B > 0$ ならば，

(5) $t \in [0,1]$, $p \geq 1$, $s \geq 1$ について

$$A \geq \{A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{(p-t)s+t}}$$

が成り立つことを証明する．$2 \geq s \geq 1$ の場合，$s-1$, $\dfrac{1}{(p-t)s+t} \in [0,1]$ である．Theorem L-H から $A^t \geq B^t$ であることより，Lemma A と Theorem L-H を用いて，任意の $t \in [0,1]$, $p \geq 1$, $2 \geq s \geq 1$ について

(6) $$\begin{aligned} B_1 &= \{A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{(p-t)s+t}} \\ &= \{B^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}})^{s-1}B^{\frac{p}{2}}\}^{\frac{1}{(p-t)s+t}} \\ &\leq \{B^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{p}{2}}B^{-t}B^{\frac{p}{2}})^{s-1}B^{\frac{p}{2}}\}^{\frac{1}{(p-t)s+t}} = B \leq A = A_1. \end{aligned}$$

(6) を $A_1 \geq B_1 > 0$ に対してもう一度適用することにより

(7) 任意の $t_1 \in [0,1]$, $p_1 \geq 1$, $2 \geq s_1 \geq 1$ について

$$A_1 \geq \{A_1^{\frac{t_1}{2}}(A_1^{\frac{-t_1}{2}}B_1^{p_1}A_1^{\frac{-t_1}{2}})^{s_1}A_1^{\frac{t_1}{2}}\}^{\frac{1}{(p_1-t_1)s_1+t_1}}.$$

(7) において $t_1 = t \in [0,1]$, $p_1 = (p-t)s+t \geq 1$ とおくことにより，$t \in [0,1]$, $p \geq 1$, $4 \geq ss_1 \geq 1$ について

(8) $$\begin{aligned} A &\geq \{A^{\frac{t}{2}}[A^{\frac{-t}{2}}A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{t}{2}}A^{\frac{-t}{2}}]^{s_1}A^{\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{(p-t)ss_1+t}} \\ &= \{A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{ss_1}A^{\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{(p-t)ss_1+t}}. \end{aligned}$$

この (6) から (8) までの過程を繰り返すことにより，(5) が任意の $t \in [0,1]$, $p \geq 1$, $s \geq 1$ について成り立つことが示される．

次に，$A_2 = A$, $B_2 = \{A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{(p-t)s+t}}$ とおく．(5) より任意の $t \in [0,1]$, $p \geq 1$, $s \geq 1$ について $A_2 \geq B_2 \geq 0$ であるので，これに Theorem F の (ii) を適用することにより，任意の $p_2 \geq 1$, $r_2 \geq 0$ について

(9) $$A_2^{1+r_2} \geq (A_2^{\frac{r_2}{2}}B_2^{p_2}A_2^{\frac{r_2}{2}})^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}}.$$

(9) において $r_2 = r-t \geq 0$, $p_2 = (p-t)s+t \geq 1$ とおくことにより Theorem G の (G-1) が得られるので，よって Theorem G は証明された． □

この Theorem G は Theorem F_1 の拡張である (§3.2 に関するメモ・注釈・参考文献を参照).

§3.2.2 Theorem F の最良性

Theorem F の best possibility (最良性) を表す次の結果を紹介する.

> **Theorem 1.** $p > 0,\ q > 0,\ r > 0$ とする. $(1+r)q < p+r$ または $0 < q < 1$ ならば, $A \geq B > 0$, かつ
>
> (1) $$A^{\frac{p+r}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$
>
> を満たさないような可逆な正値作用素 A, B が存在する.

Theorem 1 は, §3.2.1 の Figure 21 にも示されている Theorem F のパラメータ p, q, r の領域は最良であることを表している.

Theorem 1 から次の結果が容易に導かれる.

> **Theorem 1′.** $p > 1, r > 0$ とする. $\alpha > 1$ ならば, $A \geq B > 0$ かつ
>
> $$A^{(1+r)\alpha} \ngeq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{(1+r)\alpha}{p+r}}$$
>
> であるような可逆な正値作用素 A, B が存在する.

Proof of Theorem 1.

(2) $$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} \\ \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} & b+\varepsilon+\delta \end{pmatrix},$$

(3) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

とする. ここで a, b, ε, δ は

(4) $$0 < b < 1 < a,\ 0 < \varepsilon,\ 0 < \delta,\ \varepsilon(1-b) \leq \delta(a-1+\varepsilon)$$

を満たすとする. この条件から $A \geq B > 0$ は必ず成り立つので, よって, ある a, b, ε, δ について A, B が不等式 (1) を満たさないことを示せばよい. 以下の方針としては, まず δ を ε の関数として定義して, そこで $\varepsilon \to +0$ とすることにより, A, B が不等式

(1) を満たさないことを示すことにする.

$$\gamma = a - b + \varepsilon - \delta,$$

さらに

$$U = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} \sqrt{a-b-\delta} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & -\sqrt{a-b-\delta} \end{pmatrix}$$

とおく. U は unitary であり

$$U^*AU = \begin{pmatrix} a+\varepsilon & 0 \\ 0 & b+\delta \end{pmatrix}.$$

A, B が (1) を満たすと仮定する. このとき,

$$U^*A^{\frac{p+r}{q}}U \geq (U^*A^{\frac{r}{2}}UU^*B^pUU^*A^{\frac{r}{2}}U)^{\frac{1}{q}}.$$

ゆえに

$$\text{(5)} \qquad \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\frac{p+r}{q}} \end{pmatrix} \geq \gamma^{\frac{-1}{q}} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{q}}.$$

ここで

$$A_1 = (a+\varepsilon)^r(a-b-\delta+\varepsilon b^p),$$

$$A_2 = (b+\delta)^r(\varepsilon + b^p(a-b-\delta)),$$

$$A_3 = (a+\varepsilon)^{\frac{r}{2}}(b+\delta)^{\frac{r}{2}}(1-b^p)\sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)}.$$

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix},$$

さらに

$$V = \frac{1}{\sqrt{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} & \sqrt{\varepsilon_1} \\ \sqrt{\varepsilon_1} & -\sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} \end{pmatrix}$$

とおく. ここで

$$2\varepsilon_1 = -A_1 + A_2 + \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_3^2}$$

である. このとき V は unitary であり

$$V^*DV = \begin{pmatrix} A_1 + \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & A_2 - \varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

(5) より

$$\frac{1}{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix} \geq \gamma^{\frac{-1}{q}} \begin{pmatrix} (A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} & 0 \\ 0 & (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \end{pmatrix}.$$

ここで

$$B_1 = (a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}(A_1 - A_2 + \varepsilon_1) + (b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\varepsilon_1,$$

$$B_2 = (a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}\varepsilon_1 + (b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}(A_1 - A_2 + \varepsilon_1),$$

$$B_3 = \{(a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}} - (b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\}\sqrt{\varepsilon_1(A_1 - A_2 + \varepsilon_1)}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
0 \le &\left|\gamma^{\frac{1}{q}}\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix} - (A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1)\begin{pmatrix} (A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} & 0 \\ 0 & (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \end{pmatrix}\right| \\
= &(A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1)\Big\{(a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}(b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}(A_1 - A_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1)\gamma^{\frac{2}{q}} \\
&\qquad - (a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}(A_1 - A_2 + \varepsilon_1)(A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad - (b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}\varepsilon_1(A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad - (a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}\varepsilon_1(A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad - (b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}(A_1 - A_2 + \varepsilon_1)(A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + (A_1 - A_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1)(A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}(A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\Big\} \\
= &(A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1)\Big[(A_1 - A_2 + \varepsilon_1)\{(a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\} \\
&\qquad \times \{(b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\} \\
&\qquad + \varepsilon_1\{(a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\} \\
&\qquad \times \{(b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\}\Big].
\end{aligned}$$

$A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1 > 0$ であることより，次の重要な不等式を得る．

$$\begin{aligned}
\text{(6)}\quad &\varepsilon_1\{(a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\}\{(A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} - (b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}\} \\
&\le (A_1 - A_2 + \varepsilon_1)\{(a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\} \\
&\qquad \times \{(b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\}
\end{aligned}$$

ここで，不等式 (6) の両辺の ε, δ に関するオーダーを評価する．以下，o は $o(\varepsilon), o(\delta)$ を意味するものとする．すなわち，$\varepsilon, \delta \to +0$ のとき $\frac{o}{\varepsilon} \to 0$, $\frac{o}{\delta} \to 0$ である．このとき

$$A_1 = a^r(a-b)\left\{1 + \left(\frac{r}{a} + \frac{b^p}{a-b}\right)\varepsilon + \frac{-1}{a-b}\delta + o\right\},$$

$$A_2 = b^{p+r}(a-b)\left\{1 + \frac{1}{b^p(a-b)}\varepsilon + \left(\frac{r}{b} - \frac{1}{a-b}\right)\delta + o\right\},$$

$$A_3^2 = a^r b^r (a-b)(1-b^p)^2\varepsilon\left\{1 + \frac{r}{a}\varepsilon + \left(\frac{r}{b} - \frac{1}{a-b}\right)\delta + o\right\},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4A_3^2}{(A_1 - A_2)^2}}\right) = \frac{a^r b^r (1 - b^p)^2 \varepsilon}{a^r - b^{p+r}}\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right),$$

$$(b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} = (a-b)^{\frac{1}{q}} b^{\frac{p+r}{q}}\left\{1 + \frac{1}{q(a-b)}\varepsilon + \frac{1}{q}\left(\frac{p+r}{b} - \frac{1}{a-b}\right)\delta + o\right\},$$

$$(A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} = (a-b)^{\frac{1}{q}} b^{\frac{p+r}{q}}\left\{1 + \frac{2a^r - a^r b^p - b^r}{q(a-b)(a^r - b^{p+r})}\varepsilon + \frac{1}{q}\left(\frac{r}{b} - \frac{1}{a-b}\right)\delta + o\right\},$$

$$(b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} = (a-b)^{\frac{1}{q}} b^{\frac{p+r}{q}}\varepsilon\left(\frac{-(1-b^p)(a^r - b^r)}{q(a-b)(a^r - b^{p+r})} + \frac{p}{qb}\frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{o}{\varepsilon}\right),$$

$$A_1 - A_2 + \varepsilon_1 = (a-b)(a^r - b^{p+r})\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right),$$

$$(a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} = (a-b)^{\frac{1}{q}}(a^{\frac{p+r}{q}} - b^{\frac{p+r}{q}})\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right),$$

$$(A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} - (b+\delta)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} = (a-b)^{\frac{1}{q}}(a^{\frac{r}{q}} - b^{\frac{p+r}{q}})\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right),$$

$$(a+\varepsilon)^{\frac{p+r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} = (a-b)^{\frac{1}{q}} a^{\frac{r}{q}}(a^{\frac{p}{q}} - 1)\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right).$$

(6) より

$$\text{(7)}\quad a^r b^r (1-b^p)^2 (a^{\frac{p+r}{q}} - b^{\frac{p+r}{q}})(a^{\frac{r}{q}} - b^{\frac{p+r}{q}})\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right)$$

$$\le a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{p+r}{q}}(a-b)(a^r - b^{p+r})^2 (a^{\frac{p}{q}} - 1)\left(\frac{-(1-b^p)(a^r - b^r)}{q(a-b)(a^r - b^{p+r})} + \frac{p}{qb}\frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{o}{\varepsilon}\right).$$

ここで

$$\liminf_{\varepsilon,\delta\to+0}\frac{\delta}{\varepsilon} \ge \liminf_{\varepsilon,\delta\to+0}\frac{1-b}{a-1+\varepsilon} = \frac{1-b}{a-1}$$

に注意すると，$\varepsilon, \delta \to +0$ のとき，$\dfrac{\delta}{\varepsilon} = \dfrac{1-b}{a-1}$ の場合に (7) の右辺は最小値をとると考えられる．そこで

$$\delta = \frac{1-b}{a-1}\varepsilon$$

とおく．すると $\varepsilon \to +0$ のとき，(7) は

$$q(1-a^{-1})(1-b^p)^2(1 - a^{\frac{-(p+r)}{q}} b^{\frac{p+r}{q}})(1 - a^{\frac{-r}{q}} b^{\frac{p+r}{q}})$$

$$\le a^{\frac{r(q-1)}{q}} b^{\frac{p+r}{q} - r - 1}(1 - a^{-r}b^{p+r})(1 - a^{\frac{-p}{q}})$$

$$\times \{p(1-b)(1-a^{-1}b)(1-a^{-r}b^{p+r}) - b(1-b^p)(1-a^{-1})(1-a^{-r}b^r)\}.$$

(i) $1 > q > 0$ ならば，$a \to \infty$ とすることにより

$$0 \ge q(1-b^p)^2 > 0.$$

これは矛盾である．

(ii) $(1+r)q < p+r$ ならば，$b \to +0$ とすることにより

$$0 \geq q(1-a^{-1}) > 0.$$

これは矛盾である． □

§3.2.3 chaotic order $\log A \geq \log B$ の特徴づけ

Theorem 1. $A \geq B > 0$ ならば $\log A \geq \log B$ である．

Proof. $A \geq B > 0$ ならば，Theorem L-H より任意の $\alpha \in [0,1]$ について $A^\alpha \geq B^\alpha > 0$, すなわち

$$\frac{A^\alpha - I}{\alpha} \geq \frac{B^\alpha - I}{\alpha}$$

であるので，ここで $\alpha \to +0$ とすることにより $\log A \geq \log B$ を得る． □

Definition 1. $A \geq B \geq 0$ ならば $f(A) \geq f(B)$ であるとき，関数 f は **operator monotone** (作用素単調) であるという．

Remark 1. $\log A \geq \log B$ によって定義される順序を **chaotic order** ($A \gg B$ と表す) とよぶ．Theorem 1 より関数 $\log t$ は operator monotone であるので，この順序は通常の順序 $A \geq B$ よりも弱い順序である．

Theorem 2. A, B を可逆な正値作用素とする．このとき次の (i), (ii) は同値である．

(i) $\log A \geq \log B$.

(ii) すべての $p \geq 0, r \geq 0$ について $A^r \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$ が成り立つ．

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 次の，明らかであるが重要な式を確認しておく．

$$(\star\star) \qquad \text{任意の } X > 0 \text{ について } \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{1}{n}\log X\right)^n = X.$$

仮定 $\log A \geq \log B$ より，十分大きな自然数 n について

$$A_1 = I + \frac{\log A}{n} \geq I + \frac{\log B}{n} = B_1 \geq 0$$

が成り立つ．A_1, B_1 に Theorem F の (ii) を適用することにより，すべての $p \geq 0$,

$r \geq 0$ について

$$(1) \qquad A_1^{nr} \geq (A_1^{\frac{nr}{2}} B_1^{np} A_1^{\frac{nr}{2}})^{\frac{nr}{np+nr}}$$

が成り立つ．ここでパラメータが Theorem F の条件を満たしていることに注意しておく．(1) において $n \to \infty$ とすると，$(\star\star)$ を用いることにより (ii) が得られる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Theorem 1 より (ii) の両辺の対数をとって整理すると，すべての $p \geq 0$, $r \geq 0$ について

$$(p+r)\log A \geq \log(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})$$

が成り立つ．ここで $r \to +0$ とすることにより (i) が得られる． □

§3.2.4 Theorem G の最良性

Theorem G の最良性を証明するために，§3.2.2 の Theorem 1 のわずかな改良にほかならない，次の結果を準備する．

Theorem 1. $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $\delta > 0$ とする．$0 < q < 1$ または $(\delta + r)q < p + r$ ならば，$A^\delta \geq B^\delta$，かつ

$$(1) \qquad A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

であるような可逆な正値作用素 A, B が存在する．

Proof. $0 < q < 1$ または $(\delta + r)q < p + r$ であると仮定する．$p_1 = \dfrac{p}{\delta} > 0$, $r_1 = \dfrac{r}{\delta} > 0$ とおくと，このとき $(\delta + r)q < p + r$ は $(1 + r_1)q < p_1 + r_1$ と同値である．§3.2.2 の Theorem 1 より，$A_1 \geq B_1 > 0$，かつ

$$(2) \qquad A_1^{\frac{p_1+r_1}{q}} \not\geq (A_1^{\frac{r_1}{2}} B_1^{p_1} A_1^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

であるような可逆な正値作用素 A_1, B_1 が存在する．ここで $A = A_1^{\frac{1}{\delta}} > 0$, $B = B_1^{\frac{1}{\delta}} > 0$ とおくと $A_1 = A^\delta$, $B_1 = B^\delta$ であるので，よって $A_1 \geq B_1$ は $A^\delta \geq B^\delta$ と同値であり，(2) は

$$(1) \qquad A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

と同値である．よって A, B は $A^\delta \geq B^\delta$ と (1) を両方とも満たすので，ゆえに定理は証明された． □

Theorem 2. $p > 0, q > 0, r > 0$ とする．$rq < p + r$ ならば，$\log A \geq \log B$，かつ

$$(1) \qquad A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

であるような可逆な正値作用素 A, B が存在する．

Proof. $rq < p + r$ と仮定する．$0 < \dfrac{p+r}{q} - r$ より $0 < \delta < \dfrac{p+r}{q} - r$，すなわち $(\delta + r)q < p + r$ であるような $\delta > 0$ が存在する．Theorem 1 より，$A^\delta \geq B^\delta$，かつ

$$(1) \qquad A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

であるような可逆な正値作用素 A, B が存在する．§3.2.3 の Theorem 1 より，$A^\delta \geq B^\delta$ ならば $\log A \geq \log B$ である．よって A, B は $\log A \geq \log B$ と (1) を両方とも満たすので，ゆえに定理は証明された．□

Theorem 2 は次の形に簡単に書き換えられる．

Theorem 2′. $p > 0, r > 0$ とする．$\alpha > 1$ ならば，$\log A \geq \log B$，かつ

$$(3) \qquad A^{r\alpha} \not\geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r\alpha}{p+r}}$$

であるような可逆な正値作用素 A, B が存在する．

次に Theorem G の最良性を表す次の結果を証明する．

Theorem 3. $p \geq 1$, $t \in [0, 1]$, $r \geq t$, $s \geq 1$ とする．

$$(4) \qquad \frac{1 - t + r}{(p - t)s + r} < \alpha$$

ならば，$A \geq B > 0$，かつ

$$(5) \qquad A^{\{(p-t)s+r\}\alpha} \not\geq \{A^{\frac{r}{2}} (A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^\alpha$$

であるような可逆な正値作用素 A, B が存在する．

Proof. (a) $t \in [0, 1)$ の場合．　$p \geq 1$，$t \in [0, 1)$，$r \geq t$，$s \geq 1$，$\alpha > 1$ について

$$(6) \qquad S \geq T > 0 \text{ ならば } S^{(1-t+r)\alpha} \geq \{S^{\frac{r}{2}} (S^{\frac{-t}{2}} T^p S^{\frac{-t}{2}})^s S^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}\alpha}$$

が成り立つと仮定する．一方，Theorem F の (ii) より，$A \geq B > 0$ ならば，任意の $p_1 \geq 1, r_1 \geq 0$ について

(7) $$A^{1+r_1} \geq (A^{\frac{r_1}{2}} B^{p_1} A^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{1+r_1}{p_1+r_1}}$$

が成り立つ．$p_1 = \dfrac{p-t}{1-t} \geq 1,\ r_1 = \dfrac{t}{1-t} \geq 0$ とおくと，(7) より

(8) $$A^{\frac{1}{1-t}} \geq (A^{\frac{t}{2(1-t)}} B^{\frac{p-t}{1-t}} A^{\frac{t}{2(1-t)}})^{\frac{1}{p}}.$$

ここで，$S = A^{\frac{1}{1-t}},\ T = (A^{\frac{t}{2(1-t)}} B^{\frac{p-t}{1-t}} A^{\frac{t}{2(1-t)}})^{\frac{1}{p}}$ とおく．(8) より $S \geq T > 0$ であるので，(6) を適用することにより

(9) $$S^{(1-t+r)\alpha} \geq \{S^{\frac{r}{2}}(S^{\frac{-t}{2}} T^p S^{\frac{-t}{2}})^s S^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}\alpha}.$$

このとき，(9) は次と同値である．

(10) $$\begin{aligned} &A^{\left(1+\frac{r}{1-t}\right)\alpha} \\ &\geq [A^{\frac{r}{2(1-t)}}\{A^{\frac{-t}{2(1-t)}}(A^{\frac{t}{2(1-t)}} B^{\frac{p-t}{1-t}} A^{\frac{t}{2(1-t)}})^{\frac{p}{p}} A^{\frac{-t}{2(1-t)}}\}^s A^{\frac{r}{2(1-t)}}]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}\alpha} \\ &= (A^{\frac{r}{2(1-t)}} B^{\frac{p-t}{1-t}s} A^{\frac{r}{2(1-t)}})^{\frac{1+\frac{r}{1-t}}{\frac{p-t}{1-t}s+\frac{r}{1-t}}\alpha}. \end{aligned}$$

ここで $r_2 = \dfrac{r}{1-t} \geq 0,\ p_2 = \dfrac{p-t}{1-t}s \geq 1$ とおくと，(10) は

$$A^{(1+r_2)\alpha} \geq (A^{\frac{r_2}{2}} B^{p_2} A^{\frac{r_2}{2}})^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}\alpha}$$

と同値である．しかし $p_2 \geq 1, r_2 \geq 0, \alpha > 1$ であるので，これは §3.2.2 の Theorem 1′ に矛盾している．よって $t \in [0,1)$ の場合が証明された．

(b) $t = 1$ の場合．　$p \geq 1,\ r \geq 1,\ s \geq 1,\ \alpha > 1$ について

(11) $$S \geq T > 0 \text{ ならば } S^{r\alpha} \geq \{S^{\frac{r}{2}}(S^{\frac{-1}{2}} T^p S^{\frac{-1}{2}})^s S^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{r}{(p-1)s+r}\alpha}$$

が成り立つと仮定する．一方，§3.2.3 の Theorem 2 より，可逆な正値作用素 A, B について，$\log A \geq \log B$ ならば

(12) $$A \geq (A^{\frac{1}{2}} B^{p-1} A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ．$S = A,\ T = (A^{\frac{1}{2}} B^{p-1} A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{p}}$ とおく．(12) より $S \geq T > 0$ であるので，(11) を適用することにより

(13) $$S^{r\alpha} \geq \{S^{\frac{r}{2}}(S^{\frac{-1}{2}} T^p S^{\frac{-1}{2}})^s S^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{r}{(p-1)s+r}\alpha}.$$

このとき，(13) は次と同値である．

(14) $$\begin{aligned} A^{r\alpha} &\geq [A^{\frac{r}{2}}\{A^{\frac{-1}{2}}(A^{\frac{1}{2}} B^{p-1} A^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{p}} A^{\frac{-1}{2}}\}^s A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{r}{(p-1)s+r}\alpha} \\ &= (A^{\frac{r}{2}} B^{(p-1)s} A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{(p-1)s+r}\alpha}. \end{aligned}$$

ここで $p_3 = (p-1)s > 0$ とおくと，(14) は

$$A^{r\alpha} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^{p_3} A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p_3+r}\alpha}$$

と同値である．しかし $p_3 > 0,\ r \geq 1,\ \alpha > 1$ であるので，これは Theorem 2′ に矛盾している．よって $t = 1$ の場合が証明された．

(a), (b) より定理は証明された． □

§3.2.5 Theorem G に関連した作用素関数

Theorem G とそれに関連した作用素関数の同値関係を表す次の結果を示す．

Theorem 1. 次の (i)～(iv) が成り立ち，また互いに同値である．

(i) $A \geq B \geq 0$ かつ $A > 0$ ならば，各 $t \in [0,1]$, $p \geq 1$ について

$$A^{1-t+r} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}$$

が任意の $r \geq t$, $s \geq 1$ について成り立つ．

(ii) $A \geq B \geq 0$ かつ $A > 0$ ならば，各 $1 \geq q \geq t \geq 0$, $p \geq q$ について

$$A^{q-t+r} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}}$$

が任意の $r \geq t$, $s \geq 1$ について成り立つ．

(iii) $A \geq B \geq 0$ かつ $A > 0$ ならば，各 $t \in [0,1]$, $p \geq 1$ について

$$F_{p,t}(A,B,r,s) = A^{\frac{-r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} A^{\frac{-r}{2}}$$

は $r \geq t$, $s \geq 1$ について単調減少関数である．

(iv) $A \geq B \geq 0$ かつ $A > 0$ ならば，各 $t \in [0,1]$, $q \geq 0$, $p \geq t$ について

$$G_{p,q,t}(A,B,r,s) = A^{\frac{-r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}} A^{\frac{-r}{2}}$$

は $r \geq t$, $(p-t)s \geq q-t$ であるような $s \geq 1$ について単調減少関数である．

Proof. A, B はともに可逆であると仮定してよい．

(iv) $\Longrightarrow$ (iii). (iv) において $q = 1$, $p \geq 1$ とおけばよい．

(iii) $\Longrightarrow$ (i). $A \geq B \geq 0$ であることと $F_{p,t}(A,B,r,s)$ の単調性より

$$A^{1-t} \geq A^{\frac{-t}{2}} B A^{\frac{-t}{2}} = F_{p,t}(A,B,t,1) \geq F_{p,t}(A,B,r,s),$$

よって (i) が成り立つ．

(i) $\Longrightarrow$ (ii). $A_1 = A^q$, $B_1 = B^q$ とおく．$q \in [0,1]$ であるので，§3.2.1 の Throerm L-H より $A_1 \geq B_1 \geq 0$ が成り立つ．$p_1 = \dfrac{p}{q} \geq 1$, $t_1 = \dfrac{t}{q}$, $r_1 = \dfrac{r}{q}$ とおく．ここで $A_1 \geq B_1 \geq 0$ について (i) を適用すればよい．

(ii) $\Longrightarrow$ (iv). (ii) で $q = t$ とおくことにより，$A \geq B > 0$ ならば，各 $t \in [0,1]$, $p \geq t$ について

$$A^r \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{r}{(p-t)s+r}} \tag{1}$$

が任意の $r \geq t$, $s \geq 1$ について成り立つ．

(a) $G_{p,q,t}(A,B,r,s)$ が s に関する単調減少関数であることの証明．

$D = A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}$ とおく．§3.2.1 の Lemma A を (1) に適用して，さらに Theorem L-H より，各 $t \in [0,1]$, $p \geq t$, $s \geq 1, r \geq t$ について

$$(D^{\frac{s}{2}}A^rD^{\frac{s}{2}})^{\frac{(p-t)w}{(p-t)s+r}} \geq D^w \tag{2}$$

が $s \geq w \geq 0$ であるような任意の w について成り立つ．よって

$$\begin{aligned}
f(s) &= \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}} \\
&= (A^{\frac{r}{2}}D^sA^{\frac{r}{2}})^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}} \\
&= \{(A^{\frac{r}{2}}D^sA^{\frac{r}{2}})^{\frac{(p-t)(s+w)+r}{(p-t)s+r}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)(s+w)+r}} \\
&= \{A^{\frac{r}{2}}D^{\frac{s}{2}}(D^{\frac{s}{2}}A^rD^{\frac{s}{2}})^{\frac{(p-t)w}{(p-t)s+r}}D^{\frac{s}{2}}A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)(s+w)+r}} \qquad \text{(Lemma A より)} \\
&\geq (A^{\frac{r}{2}}D^{s+w}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{q-t+r}{(p-t)(s+w)+r}} \\
&= f(s+w).
\end{aligned}$$

最後の不等号は，(2) と $\dfrac{q-t+r}{(p-t)(s+w)+r} \in [0,1]$ であることから Theorem L-H より成り立つ．よって $G_{p,q,t}(A,B,r,s) = A^{\frac{-r}{2}}f(s)A^{\frac{-r}{2}}$ は s についての単調減少関数であり，(a) は示された．

(b) $G_{p,q,t}(A,B,r,s)$ が r に関する単調減少関数であることの証明．

Theorem L-H を (1) に適用することにより，$A \geq B > 0$ ならば，各 $t \in [0,1]$, $p \geq t$, $s \geq 1, r \geq t$ について

$$A^u \geq (A^{\frac{r}{2}}D^sA^{\frac{r}{2}})^{\frac{u}{(p-t)s+r}} \tag{3}$$

が $r \geq u \geq 0$ であるような任意の u について成り立つ．よって

$$\begin{aligned}
G_{p,q,t}(A,B,r,s) &= A^{\frac{-r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{q-t+r}{(p-t)s+r}}A^{\frac{-r}{2}} \\
&= D^{\frac{s}{2}}(D^{\frac{s}{2}}A^rD^{\frac{s}{2}})^{\frac{q-t-(p-t)s}{(p-t)s+r}}D^{\frac{s}{2}} \qquad \text{(Lemma A より)} \\
&= D^{\frac{s}{2}}\{(D^{\frac{s}{2}}A^rD^{\frac{s}{2}})^{\frac{(p-t)s+r+u}{(p-t)s+r}}\}^{\frac{q-t-(p-t)s}{(p-t)s+r+u}}D^{\frac{s}{2}}
\end{aligned}$$

$$= D^{\frac{s}{2}}\{D^{\frac{s}{2}}A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}D^{s}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{u}{(p-t)s+r}}A^{\frac{r}{2}}D^{\frac{s}{2}}\}^{\frac{q-t-(p-t)s}{(p-t)s+r+u}}D^{\frac{s}{2}}$$

(Lemma A より)

$$\geq D^{\frac{s}{2}}(D^{\frac{s}{2}}A^{r+u}D^{\frac{s}{2}})^{\frac{q-t-(p-t)s}{(p-t)s+r+u}}D^{\frac{s}{2}}$$

$$= G_{p,q,t}(A,B,r+u,s).$$

最後の不等号は，(3) と $\dfrac{q-t-(p-t)s}{(p-t)s+r+u} \in [-1,0]$ であることから Theorem L-H より成り立つ．よって $G_{p,q,t}(A,B,r,s)$ は r についての単調減少関数であり，(b) は示された．

以上 (a), (b) より (iv) が示されたので，よって定理は証明された． □

Corollary 2. $A \geq B > 0$ ならば，各 $t \in [0,1]$, $p \geq 1$, $r \geq t$, $s \geq 1$ について次が成り立つ．

(i) $$\{B^{\frac{t}{2}}(B^{\frac{-t}{2}}A^{p}B^{\frac{-t}{2}})^{s}B^{\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{(p-t)s+t}} \geq A \geq B \geq \{A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{s}A^{\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{(p-t)s+t}}.$$

(ii) $$B^{\frac{-(r-t)}{2}}(B^{\frac{r-t}{2}}A^{p}B^{\frac{r-t}{2}})^{\frac{1-t+r}{p-t+r}}B^{\frac{-(r-t)}{2}} \geq A \geq B \geq A^{\frac{-(r-t)}{2}}(A^{\frac{r-t}{2}}B^{p}A^{\frac{r-t}{2}})^{\frac{1-t+r}{p-t+r}}A^{\frac{-(r-t)}{2}}.$$

Proof. (i) Theorem 1 より，各 $t \in [0,1]$, $p \geq 1$, $r \geq t$, $s \geq 1$ について

$$F_{p,t}(A,B,t,1) \geq F_{p,t}(A,B,t,s) \geq F_{p,t}(A,B,r,s),$$

よって (i) の後半の不等式を得る．Theorem F の (i) から (ii) が得られることは §3.2.1 で示したが，それと同様にして，(i) の前半の不等式は後半の不等式の両辺の逆をとることにより得られる．

(ii) Theorem 1 より，各 $t \in [0,1]$, $p \geq 1$, $r \geq t$, $s \geq 1$ について

$$F_{p,t}(A,B,t,1) \geq F_{p,t}(A,B,r,1) \geq F_{p,t}(A,B,r,s),$$

よって (ii) の後半の不等式を得る．(ii) の前半の不等式は，(i) と同様にして簡単に導かれる． □

Corollary 3. $A \geq B > 0$ ならば，各 $p \geq 1$, $r \geq 0$ について

$$B^{\frac{-r}{2}}(B^{\frac{r}{2}}A^{p}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}B^{\frac{-r}{2}} \geq A \geq B \geq A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{p}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$

が成り立つ．

Proof. Corollary 2 において $t=0$ とおけばよい. □

Remark 1. Corollary 3 から §3.2.1 の Theorem F_1 は容易に導かれる.

Corollary 4. $A \geq B > 0$ ならば, 次が成り立つ.

(i)
$$f(p,r) = B^{\frac{-r}{2}}(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}B^{\frac{-r}{2}}$$
は $p \geq 1$, $r \geq 0$ に関する単調増加関数である.

(ii)
$$g(p,r) = A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$
は $p \geq 1$, $r \geq 0$ に関する単調減少関数である.

Proof. (ii) Theorem 1 の (iii) で $t=0$, $p=1$ とおいて, さらに s を p に置き換えればよい.

(i) $B^{-1} \geq A^{-1}$ であるので, よって (ii) より $B^{\frac{r}{2}}(B^{\frac{-r}{2}}A^{-p}B^{\frac{-r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}B^{\frac{r}{2}}$ は $p \geq 1$, $r \geq 0$ に関する単調減少関数である. よってこの逆をとることにより, (i) を得る. □

Remark 2. Corollary 4 から Corollary 3 は容易に導かれる.

Corollary 5. $A \geq B > 0$ ならば, 次が成り立つ.

(i) 任意の固定された $t \geq 0$ について
$$f(p,r) = B^{\frac{-r}{2}}(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}}B^{\frac{-r}{2}}$$
は $p \geq t$, $r \geq 0$ に関する単調増加関数である.

(ii) 任意の固定された $t \geq 0$ について
$$g(p,r) = A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$
は $p \geq t$, $r \geq 0$ に関する単調減少関数である.

Proof. (i) Theorem 1 の (iv) で $t=0$ とおいて, さらに ps を p, q を t と置き換えればよい.

(ii) Corollary 4 の (ii) の証明と同様にすれば明らかである. □

§3.2 に関するメモ・注釈・参考文献

T.Ando *On some operator inequalities*, Math. Ann., **279**(1987), 157–159.

T.Ando and F.Hiai *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197, 198**(1994), 113–131.

E.Bach and T.Furuta *Order preserving operator inequalities*, J. Operator Theory, **19**(1988), 341–346.

N.N.Chan and M.K.Kwong *Hermitian matrix inequalities and a conjecture*, Amer. Math. Monthly, **92**(1985), 533–541.

M.Cho, T.Furuta, J.I.Lee and W.Y.Lee *A folk theorem on Furuta inequality*, Scientiae Mathematicae, **3**(2000), 229–231.

M.Fujii *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory, **23**(1990), 67–72.

M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl., **179**(1993), 161–169.

M.Fujii, J.F.Jiang, E.Kamei and K.Tanahashi *A characterization of chaotic order and a problem*, J. Inequal. Appl., **2**(1998), 149–156.

M.Fujii and E.Kamei *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 2751–2756.

M.Fujii, A.Matsumoto and R.Nakamoto *A short proof of the best possibility for the grand Furuta inequality*, J. Inequal. Appl., **4**(1999), 339–344.

T.Furuta

[1] $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., **101**(1987), 85–88.

[2] *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci., **65** Ser.A (1989), 126.

[3] *Applications of order preserving operator inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl., **59**(1992), 180–190.

[4] *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log majorization*, Linear Algebra Appl., **219**, (1995), 139–155.

[5] *Simplified proof of an order preserving operator inequality*, Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci., **74**(1998), 114.

T.Furuta, M.Hashimoto and M.Ito *Equivalence relation between genralized Furuta inequality and related operator functions*, Scientiae Mathematicae, **1**(1998), 257–259.

T.Furuta and D.Wang *A decreasing operator function associated with the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **126**(1998), 2427–2432.

T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida *Operator functions implying generalized Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **1**(1998), 123–130.

F.Hansen *An operator inequality*, Math. Ann., **246**(1980), 249–250.

E.Heinz *Beiträge zur Strüngstheorie der Spektrallegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

E.Kamei *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon., **33**(1988), 883–886.

T.Kato *Notes on some inequalties for linear operators*, Math. Ann., **125**(1952), 208–212.

C.-S.Lin *The Furuta inequality and an operator equation for linear operators*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **35**(1999), 309–313.

K.Löwner *Über monotone Matrixfunktionen*, Math. Z., **38**(1934), 177–216.

G.K.Pedersen *Some operator monotone functions*, Proc, Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.

K.Tanahashi

[1] *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 141–146

[2] *The best possibility of the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **128**(2000), 511–519.

M.Uchiyama *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 469–471.

T.Yamazaki *Simplified proof of Tanahashi's result on the best possibility of generalized Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 473–477.

M.Yanagida *Some applications of Tanahashi's result on the best possibility of Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 297–305.

§3.2.1 の Theorem L-H (Löwner-Heinz の不等式) は非常に有用で基本となる作用素不等式であるので，多くの別証明が与えられているが，ここでは [Pedersen 1972] による簡潔な証明を参照しておく．Theorem L-H は [Heinz 1951] が証明を与え，後に [Kato 1952] がより短い証明を与えた．Theorem L-H のより一般的な形は [Löwner 1934] により与えられている．

§3.2.1 の Theorem F (Furuta 不等式) から，Theorem F の (i) または (ii) において $r=0$ とおくことにより，Löwner-Heinz の不等式を導くことができる．

2 つの『魔法の箱』

$$f(\square) = (B^{\frac{r}{2}}\square B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}, \qquad g(\square) = (A^{\frac{r}{2}}\square A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

を考える．このとき Theorem F は次のようにみなすことができる．$p>1$ のとき，$A \geq B \geq 0$ であっても一般には $A^p \geq B^p$ であるとは限らないが，Theorem F は 2 つの「順序を保存する作用素不等式」が成り立つことを主張している．つまり $A \geq B \geq 0$ ならば，p, q, r が §3.2.1 の Figure 21 に示された領域にあるとき，

$$f(A^p) \geq f(B^p), \qquad g(A^p) \geq g(B^p)$$

が成り立つ．

Theorem F から

$$A \geq B \geq 0 \text{ ならば } A^3 \geq (AB^2A)^{\frac{3}{4}}$$

が成り立つ．これに Theorem L-H を適用することにより，$A \geq B \geq 0$ ならば $A^2 \geq (AB^2A)^{\frac{1}{2}}$ が成り立つことが導かれるが，この結果は [Chan-Kwong1985] により予想されていた．

Theorem F は [Hansen 1980] の結果を用いて [Furuta 1987] により確立された．作用素平均の理論を用いた別証明が [M.Fujii 1990], [Kamei 1988] により与えられ，また，極分解を巧みに用いた 1 ページの証明が [Furuta 1989] により与えられている．これらの証明のすべてにおいて Theorem L-H を必要としていることを注意しておく．

§3.2.1 の Theorem F′ と Theorem F″ は [Cho-Furuta-J.I.Lee-W.Y.Lee] により示された．

Theorem F の最良性の巧みで困難な証明は [Tanahashi 1996] によって与えられた．

§3.2.3 の Theorem 2 は [Furuta 1992], [M.Fujii-Furuta-Kamei 1993] により得られているが，Theorem F のみを用いた，手際のよい簡潔な目を見張るような証明が [Uchiyama 1999] によって与えられている．

§3.2.3 の Theorem 2 の $p = r$ の場合は [Ando 1987] によって示されていることに注意しておく．

§3.2.1 の Theorem G (一般化 Furuta 不等式) は，Theorem F と [Ando-Hiai 1994] による log-majorization の主結果と同値な作用素不等式とを補間する結果である．Theorem G の最初の証明は [Furuta 1995] により与えられ，別証明が [M.Fujii-Kamei 1996], [Furuta-Yamazaki-Yanagida 1998] に，1 ページの証明が [Furuta 1998] に与えられている．

Theorem G の最良性は，[Tanahashi 2000] が優れた手法と困難な計算によって証明した．さらに，とても簡潔な別証明が [Yamazaki 1999], [M.Fujii-Matsumoto-Nakamoto] により与えられている．

ここで紹介した Theorem F, Theorem G の証明は，それぞれ [Furuta 1989], [Furuta 1998] をわずかに改良したものである．

§3.2.5 の Theorem 1 は [Furuta-Hashimoto-Ito 1998] によるものであり，Corollary 3 は [Furuta 1992], [M.Fujii-Furuta-Kamei 1993] によるものである．Theorem 1 の拡張は [Furuta-Yamazaki-Yanagida 1998] によって与えられている．

また，いくつかのタイプの順序を保存する作用素不等式が [Bach-Furuta 1988] により与えられている．

§3.2.1 の Theorem L-H, Lemma A, Theorem F, Theorem G のいくつかの応用は，この後の節に紹介されている．

§3.3 chaotic order と相対作用素エントロピー

§3.3.1 相対作用素エントロピーへの chaotic order の特徴づけの応用

特に断りのない場合は，ヒルベルト空間上の有界線形作用素のことを単に作用素と記す．

ヒルベルト空間 H 上の可逆な正値作用素 A, B に対して，**relative operator entropy** (相対作用素エントロピー) $S(A|B)$ は次のように定義される．

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}}(\log A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

相対作用素エントロピーは，Nakamura, Umegaki によるエントロピーや Umegaki による相対エントロピーの拡張である．また，

$$S(A|I) = -A \log A$$

は **operator entropy** (作用素エントロピー) としてよく知られている．

Theorem 1. A, B を可逆な正値作用素とする．このとき，次の命題は互いに同値である．

(I) $A \gg B \qquad (\log A \geq \log B)$.

(II_1) 任意の $p \geq 0$, $u \geq 0$ に対して

$$A^u \geq (A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}})^{\frac{u}{p+u}}.$$

(II_2) ある正の実数 p_0, u_0 と任意の $u \in [0, u_0]$ に対して

$$A^u \geq (A^{\frac{u}{2}} B^{p_0} A^{\frac{u}{2}})^{\frac{u}{p_0+u}}.$$

(III_1) 任意の $p \geq 0$, $u \geq 0$ に対して

$$\log A^{p+u} \geq \log(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}}).$$

(III_2) ある正の実数 p_0, u_0 と任意の $u \in [0, u_0]$ に対して

$$\log A^{p_0+u} \geq \log(A^{\frac{u}{2}} B^{p_0} A^{\frac{u}{2}}).$$

Proof. (I) $\Longleftrightarrow$ (II_1) は §3.2.3 の Theorem 2 で示されている．

$(\mathrm{III}_2) \Longrightarrow$ (I). (III_2) において $u = 0$ とすればよい．

$(\mathrm{II}_1) \Longrightarrow (\mathrm{II}_2) \Longrightarrow (\mathrm{III}_2)$, $(\mathrm{II}_1) \Longrightarrow (\mathrm{III}_1) \Longrightarrow (\mathrm{III}_2)$ は $\log t$ が operator monotone であることよりわかる． □

Theorem 2. A, B, C を可逆な正値作用素とする．このとき，次の命題は互いに同値である．

(I) $C \gg A \gg B \qquad (\log C \geq \log A \geq \log B)$.

(II$_1$) 任意の $p \geq 0$, $u \geq 0$ に対して

$$(A^{\frac{u}{2}} C^p A^{\frac{u}{2}})^{\frac{u}{p+u}} \geq A^u \geq (A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}})^{\frac{u}{p+u}}.$$

(II$_2$) ある正の実数 p_0, u_0 と任意の $u \in [0, u_0]$ に対して

$$(A^{\frac{u}{2}} C^{p_0} A^{\frac{u}{2}})^{\frac{u}{p_0+u}} \geq A^u \geq (A^{\frac{u}{2}} B^{p_0} A^{\frac{u}{2}})^{\frac{u}{p_0+u}}.$$

(III$_1$) 任意の $p \geq 0$, $u \geq 0$ に対して

$$\log(A^{\frac{u}{2}} C^p A^{\frac{u}{2}}) \geq \log A^{p+u} \geq \log(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}}).$$

(III$_2$) ある正の実数 p_0, u_0 と任意の $u \in [0, u_0]$ に対して

$$\log(A^{\frac{u}{2}} C^{p_0} A^{\frac{u}{2}}) \geq \log A^{p_0+u} \geq \log(A^{\frac{u}{2}} B^{p_0} A^{\frac{u}{2}}).$$

(IV$_1$) 任意の $p \geq 0$, $u \geq 0$ に対して

$$S(A^{-u}|C^p) \geq S(A^{-u}|A^p) \geq S(A^{-u}|B^p).$$

(IV$_2$) ある正の実数 p_0, u_0 と任意の $u \in [0, u_0]$ に対して

$$S(A^{-u}|C^{p_0}) \geq S(A^{-u}|A^{p_0}) \geq S(A^{-u}|B^{p_0}).$$

Proof. (I) $\Longleftrightarrow$ (II$_1$) $\Longleftrightarrow$ (II$_2$) $\Longleftrightarrow$ (II$_3$) $\Longleftrightarrow$ (III$_1$) $\Longleftrightarrow$ (III$_2$) は，Theorem 1 よりわかる．

(III$_1$) $\Longleftrightarrow$ (IV$_1$) と (III$_2$) $\Longleftrightarrow$ (IV$_2$) は，相対作用素エントロピーの定義 (1) よりわかる． □

Corollary 3. A, B, C を可逆な正値作用素とする．このとき，$C \gg A^{-1} \gg B$ ならば

$$S(A|C) \geq -2A \log A \geq S(A|B)$$

が成り立つ．

Proof. Theorem 2 (IV$_1$) において $p = u = 1$ とし，A を A^{-1} に取り替えると，$S(A|C) \geq S(A|A^{-1}) \geq S(A|B)$．よって，これと

$$S(A|A^{-1}) = -2A \log A$$

をあわせると証明が完了する． □

Theorem 4. A, B を可逆な正値作用素とする．このとき，任意の正の実数 x_0 に対して次の不等式が成り立つ．

$$(\log x_0 - 1)A + \frac{1}{x_0}B \geq S(A|B) \geq (1 - \log x_0)A - \frac{1}{x_0}AB^{-1}A.$$

また，$S(A|B) = 0$ と $A = B$ は同値である．

Proof. まず，任意の正の実数 x, x_0 に対して次の不等式

$$\log x_0 - 1 + \frac{x}{x_0} \geq \log x \geq 1 - \log x_0 - \frac{1}{x_0 x} \tag{2}$$

が成り立つことに注意する．(2) において x を $A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}}$ に取り替え，その両側から $A^{\frac{1}{2}}$ をかけると，

$$A^{\frac{1}{2}}\left(\log x_0 - 1 + \frac{1}{x_0}A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}} \geq A^{\frac{1}{2}}(\log A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$$
$$\geq A^{\frac{1}{2}}\left(1 - \log x_0 - \frac{1}{x_0}A^{\frac{1}{2}}B^{-1}A^{\frac{1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}}.$$

よって，

$$(\log x_0 - 1)A + \frac{1}{x_0}B \geq S(A|B) \geq (1 - \log x_0)A - \frac{1}{x_0}AB^{-1}A \tag{3}$$

が成り立つ．

次に後半を示す．$S(A|B) = 0$ と仮定する．このとき，(3) において $x_0 = 1$ とすると

$$-A + B \geq 0 \geq A - AB^{-1}A,$$

すなわち，$B \geq A$ かつ $AB^{-1}A \geq A$ が成り立つ．$AB^{-1}A \geq A$ は $A \geq B$ と同値なので，結局 $A = B$ が成り立つ．逆は $S(A|B)$ の定義 (1) よりわかる．□

§3.3.2 chaotic order と関連した作用素関数

Theorem 1. A, B を可逆な正値作用素とする．このとき，次の命題 (I) ～(III) は互いに同値である．

(I) $A \gg B$ $\quad(\log A \geq \log B)$.

(II) 任意の $t \geq 0$ に対して，

$$F(p,r) = B^{\frac{-r}{2}}(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}}B^{\frac{-r}{2}}$$

は $p \geq t$, $r \geq 0$ で p と r の単調増加関数である．

(III) 任意の $t \geq 0$ に対して,

$$G(p,r) = A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}}$$

は $p \geq t$, $r \geq 0$ で p と r の単調減少関数である.

Proof. (I) $\Longrightarrow$ (III). §3.2.3 の Theorem 2 より, $\log A \geq \log B$ は任意の $p \geq 0$, $r \geq 0$ に対して

$$(1) \qquad A^r \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$$

が成り立つことと同値である. また, §3.2.1 の Lemma A より, (1) は任意の $p \geq 0$, $r \geq 0$ に対して, 次の (2) が成り立つことと同値である.

$$(2) \qquad (B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{r+p}} \geq B^p.$$

ここで (1), (2) に Theorem L-H を適用すると次の (3), (4) を得る.

(3) 任意の $p \geq 0$, $r \geq u \geq 0$ に対して, $A^u \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{u}{p+r}}$,

(4) 任意の $r \geq 0$, $p \geq w \geq 0$ に対して, $(B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}})^{\frac{w}{r+p}} \geq B^w$.

(a) $G(p,r)$ が p について単調減少であることの証明.

$$\begin{aligned}
G(p,r) &= A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}} \\
&= A^{\frac{-r}{2}}\{(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{p+w+r}{p+r}}\}^{\frac{t+r}{p+w+r}}A^{\frac{-r}{2}} \\
&= A^{\frac{-r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}})^{\frac{w}{p+r}}B^{\frac{p}{2}}A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{t+r}{p+w+r}}A^{\frac{-r}{2}} \\
&\qquad\qquad (\text{§3.2.1 の Lemma A より}) \\
&\geq A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{p}{2}}B^wB^{\frac{p}{2}}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+w+r}}A^{\frac{-r}{2}} \\
&= A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{p+w}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+w+r}}A^{\frac{-r}{2}} \\
&= G(p+w,r).
\end{aligned}$$

不等号の部分は, $\dfrac{t+r}{p+w+r} \in [0,1]$ であることから, (4) と Theorem L-H より成り立つ. よって, $G(p,r)$ は $p \geq t$ で p について単調減少である.

(b) $G(p,r)$ が r について単調減少であることの証明.

$$\begin{aligned}
G(p,r) &= A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}} \\
&= B^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}})^{\frac{t-p}{p+r}}B^{\frac{p}{2}} \qquad (\text{§3.2.1 の Lemma A より}) \\
&= B^{\frac{p}{2}}\{(B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}})^{\frac{p+r+u}{p+r}}\}^{\frac{t-p}{p+r+u}}B^{\frac{p}{2}} \\
&= B^{\frac{p}{2}}\{B^{\frac{p}{2}}A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{u}{p+r}}A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{p}{2}}\}^{\frac{t-p}{p+r+u}} \qquad (\text{§3.2.1 の Lemma A より})
\end{aligned}$$

$$\geq B^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{p}{2}}A^{\frac{r}{2}}A^{u}A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{p}{2}})^{\frac{t-p}{p+r+u}}B^{\frac{p}{2}}$$
$$= B^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{p}{2}}A^{r+u}B^{\frac{p}{2}})^{\frac{t-p}{p+r+u}}B^{\frac{p}{2}}$$
$$= G(p, r+u).$$

不等号の部分は，$\dfrac{t-p}{p+r+u} \in [-1, 0]$ であることから，(3) と Theorem L-H より成り立つ．よって，$G(p,r)$ は $r \geq 0$ で r について単調減少である．

(III) $\Longrightarrow$ (I). (III) において $t=0$ とし，$G(p,0) \geq G(p,r)$ を考えると，任意の $p \geq 0$, $r \geq 0$ に対して

$$I \geq A^{\frac{-r}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{p}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}A^{\frac{-r}{2}},$$

すなわち

$$A^{r} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^{p}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$$

が成り立つ．よって，§3.2.3 の Theorem 2 より $\log A \geq \log B$ である．

ゆえに (I) $\Longleftrightarrow$ (III) が示された．

(I) $\Longleftrightarrow$ (II). $\log A \geq \log B$ は $\log B^{-1} \geq \log A^{-1}$ と同値なので，(I) $\Longleftrightarrow$ (III) より，$\log A \geq \log B$ と次の命題 (5) は同値である．

> **(5)** 任意の $t \geq 0$ に対して，
> $$B^{\frac{r}{2}}(B^{\frac{-r}{2}}A^{-p}B^{\frac{-r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}}B^{\frac{r}{2}}$$
> は $p \geq t$, $r \geq 0$ で p と r の単調減少関数である．

また，(5) は次の (6) と同値である．

> **(6)** 任意の $t \geq 0$ に対して，
> $$F(p,r) = B^{\frac{-r}{2}}(B^{\frac{r}{2}}A^{p}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{t+r}{p+r}}B^{\frac{-r}{2}}$$
> は $p \geq t$, $r \geq 0$ で p と r の単調増加関数である．

よって，(I) $\Longleftrightarrow$ (II) が示された． □

Remark 1. §3.2.3 の Theorem 1 より，$A \geq B > 0$ ならば $\log A \geq \log B$ なので，Theorem 1 は §3.2.5 の Corollary 5 より精密な結果であることがわかる．

§3.3 に関するメモ・注釈・参考文献

J.I.Fujii and E.Kamei

[1] *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon., **34**(1989), 341–348.

[2] *Uhlmann's interpolational method for operator means*, Math. Japon., **34**(1989), 541–547.

M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl., **179**(1993), 161–169.

M.Fujii, T.Furuta and D.Wang *An application of the Furuta inequality to operator inequalities on chaotic orders*, Math. Japon., **40**(1994), 317–321.

T.Furuta

[1] *Applications of order preserving operator inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl., **59**(1992), 180–190.

[2] *Applications of order preserving operator inequalities to a generalized relative operator entropy*, General Inequalties 7, Birkhäuser-Verlag, **123**(1997), 65–76.

M.Nakamura and H.Umegaki *A note on the entropy for operator algebras*, Proc. Japan Acad., **37**(1961), 149–154.

H.Umegaki *Conditional expectation in operator algebra IV*, (entropy and information), Kodai Math. Sem. Rep., **14**(1962), 59–85.

A, B をヒルベルト空間上の可逆な正値作用素とする．$-A\log A$ は有名な作用素エントロピーである．また，相対作用素エントロピー $S(A|B) = A^{\frac{1}{2}}(\log A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$ は [J.I.Fujii-Kamei 1989] で導入された．相対作用素エントロピーは [Nakamura-Umegaki 1961] によるエントロピーや [Umegaki 1962] による相対エントロピーの拡張となっている．

§3.3.1 の Theorem 1, Theorem 2 は [Furuta 1992], Theorem 4 は [Furuta 1997] でそれぞれ示されている．

§3.3.2 の Theorem 1 は [Furuta 1992], [M.Fujii-Furuta-Kamei 1993] で示されている．

§3.4 p-hyponormal 作用素と log-hyponormal 作用素の Aluthge transformation

§3.4.1 p-hyponormal 作用素の Aluthge transformation

本節において，特に断りのないときは $T \in B(H)$ とする．

Definition 1. 正の実数 p に対して $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ を満たすとき，T は **p-hyponormal 作用素** であるという．

p-hyponormal は hyponormal の拡張として定義されたものである．また，p-hyponormal 作用素の性質に関しては多くの研究者によって研究がなされている (§3.4 に関するメモ・注釈・参考文献を参照)．

Definition 2. T の極分解を $T = U|T|$ とする．このとき，

$$\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$$

を T の **Aluthge transformation** (アルスゲ変換) とよぶ．

Theorem 1. p-hyponormal $(0 < p \leq 1)$ 作用素 T の極分解を $T = U|T|$ とし，このときの U を unitary 作用素とする．このとき次の命題が成り立つ．

(i) $0 < p \leq \frac{1}{2}$ のとき $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は $(p + \frac{1}{2})$-hyponormal 作用素である．

(ii) $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ のとき $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は hyponormal 作用素である．

Proof. (i) T を p-hyponormal 作用素 $(0 < p \leq \frac{1}{2})$ とすると，次の式が成り立つ．

$$U^*|T|^{2p}U \geq |T|^{2p} \geq U|T|^{2p}U^*.$$

また，$A = U^*|T|^{2p}U$, $B = |T|^{2p}$, $C = U|T|^{2p}U^*$ とすると $A \geq B \geq C \geq 0$ となる．

ここで，

$$\frac{1}{p+\frac{1}{2}} \geq 1, \qquad 0 < p \leq \frac{1}{2}, \qquad \left(1 + \frac{1}{2p}\right)\frac{1}{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}$$

より，§3.2.1 の Theorem F′ を適用すると

$$\begin{aligned}(\widetilde{T}^*\widetilde{T})^{p+\frac{1}{2}} &= (|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}})^{p+\frac{1}{2}} \\ &= (B^{\frac{1}{4p}}A^{\frac{1}{2p}}B^{\frac{1}{4p}})^{p+\frac{1}{2}} \\ &\geq B^{\frac{p+\frac{1}{2}}{p}} = |T|^{2(p+\frac{1}{2})} \\ &\geq (B^{\frac{1}{4p}}C^{\frac{1}{2p}}B^{\frac{1}{4p}})^{p+\frac{1}{2}} \\ &= (|T|^{\frac{1}{2}}U|T|U^*|T|^{\frac{1}{2}})^{p+\frac{1}{2}} \\ &= (\widetilde{T}\widetilde{T}^*)^{p+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

よって，$(\widetilde{T}^*\widetilde{T})^{p+\frac{1}{2}} \geq B^{\frac{p+\frac{1}{2}}{p}} \geq (\widetilde{T}\widetilde{T}^*)^{p+\frac{1}{2}}$ より，$\widetilde{T}$ は $(p+\frac{1}{2})$-hyponormal 作用素である．

(ii) T を p-hyponormal 作用素 $(\frac{1}{2} < p < 1)$，すなわち $|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p}$ とすると，Theorem L-H より $|T| \geq |T^*|$．よって次の式が成り立つ．

$$U^*|T|U \geq |T| \geq U|TU^*.$$

ゆえに

$$\widetilde{T}^*\widetilde{T} - \widetilde{T}\widetilde{T}^* = |T|^{\frac{1}{2}}(U^*|T|U - U|T|U^*)|T|^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

より $\widetilde{T}^*\widetilde{T} \geq \widetilde{T}\widetilde{T}^*$ が成り立つので，$\widetilde{T}$ は hyponormal 作用素である． □

ここで，次の補題を用意しておく．

Lemma 1. $A \geq 0$ とし，$T = U|T|$ を T の極分解とする．このとき，$\alpha > 0, \beta > 0$ に対して次の命題が成り立つ．

(i) $U^*U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha = (|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha$.

(ii) $UU^*(|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha = (|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha$.

(iii) $(U|T|^\beta A|T|^\beta U^*)^\alpha = U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha U^*$.

(iv) $(U^*|T^*|^\beta A|T^*|^\beta U)^\alpha = U^*(|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha U$.

Proof. (i) $N(|T|) = N(|T|^\beta) \subset N(|T|^\beta A|T|^\beta) = N((|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha)$，すなわち

$$\overline{R((|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha)} \subset \overline{R(|T|)}$$

であることに注意すると，U^*U が $\overline{R(|T|)}$ への initial projection であることより，$\alpha > 0$ に対して

$$U^*U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha = (|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha$$

であることがわかる.

(ii) §2.2.2 の Theorem 5 より $T^* = U^*|T^*|$ は T^* の極分解であるので，これに (i) を適用すればよい.

(iii) U^*U が $\overline{R(|T|^\beta)}$ への initial projection であることに注意すると，

$$\begin{aligned}(U|T|^\beta A|T|^\beta U^*)^2 &= U|T|^\beta A|T|^\beta U^* \cdot U|T|^\beta A|T|^\beta U^* \\ &= U(|T|^\beta A|T|^\beta)^2 U^*.\end{aligned}$$

同様にして，(i) より任意の自然数 n, m に対して

$$(U|T|^\beta A|T|^\beta U^*)^{\frac{n}{m}} = U(|T|^\beta A|T|^\beta)^{\frac{n}{m}} U^*$$

が成り立つ．よって，$\dfrac{n}{m} \to \alpha$ とすると

$$(U|T|^\beta A|T|^\beta U^*)^\alpha = U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha U^*$$

が作用素の連続性より成り立つ.

(iv) §2.2.2 の Theorem 5 より $T^* = U^*|T^*|$ は T^* の極分解であるので，これに (iii) を適用すればよい. □

次に，Theorem 1 を拡張した定理について紹介する.

Definition 3. T の極分解を $T = U|T|$ とする．このとき，

$$\widetilde{T}_{s,t} = |T|^s U|T|^t$$

を T の **generalized Aluthge transformation** (一般化アルスゲ変換) とよぶ.

Theorem 2. p-hyponormal 作用素 $(0 < p \leq 1)$ T の極分解を $T = U|T|$ とする．このとき次の命題が成り立つ.

(i) $s > 0, t > 0, \max\{s,t\} \geq p$ のとき $\widetilde{T}_{s,t} = |T|^s U|T|^t$ は $\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}$-hyponormal 作用素である.

(ii) $s > 0, t > 0, \max\{s,t\} \leq p$ のとき $\widetilde{T}_{s,t} = |T|^s U|T|^t$ は hyponormal 作用素である.

Theorem 2 において $s = t = \frac{1}{2}$ としたものが Theorem 1 となっている.

Proof. (i) $A=|T|^{2p}$, $B=|T^*|^{2p}$ とすると, T が p-hyponormal 作用素であることより $A \geq B \geq 0$. ここで,

$$\left(1+\frac{t}{p}\right)\frac{s+t}{p+\min\{s,t\}} \geq \frac{s}{p}+\frac{t}{p}, \qquad \frac{s+t}{p+\min\{s,t\}} \geq 1$$

より, §3.2.1 の Theorem F の (i) を適用すると,

$$\begin{aligned}
\text{(1)} \qquad (\widetilde{T}^*_{s,t}\widetilde{T}_{s,t})^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}} &= (|T|^tU^*|T|^{2s}U|T|^t)^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}} \\
&= (U^*U|T|^tU^*|T|^{2s}U|T|^tU^*U)^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}} \\
&= (U^*|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^tU)^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}} \\
&= U^*(|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^t)^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}}U \qquad \text{(Lemma 1 (iv) より)} \\
&= U^*(B^{\frac{t}{2p}}A^{\frac{s}{p}}B^{\frac{t}{2p}})^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}}U \\
&\geq U^*B^{\frac{p+\min\{s,t\}}{p}}U \\
&= U^*|T^*|^{2(p+\min\{s,t\})}U \\
&= |T|^{2(p+\min\{s,t\})}.
\end{aligned}$$

一方,

$$\left(1+\frac{s}{p}\right)\frac{s+t}{p+\min\{s,t\}} \geq \frac{t}{p}+\frac{s}{p}, \qquad \frac{s+t}{p+\min\{s,t\}} \geq 1$$

より, §3.2.1 の Theorem F の (ii) を適用すると,

$$\begin{aligned}
\text{(2)} \qquad (\widetilde{T}_{s,t}\widetilde{T}^*_{s,t})^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}} &= (|T|^sU|T|^{2t}U^*|T|^s)^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}} \\
&= (|T|^s|T^*|^{2t}|T|^s)^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}} \\
&= (A^{\frac{s}{2p}}B^{\frac{t}{p}}A^{\frac{s}{2p}})^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}} \\
&\leq A^{\frac{p+\min\{s,t\}}{p}} \\
&= |T|^{2(p+\min\{s,t\})}.
\end{aligned}$$

よって, (1), (2) より

$$(\widetilde{T}^*_{s,t}\widetilde{T}_{s,t})^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}} \geq |T|^{2(p+\min\{s,t\})} \geq (\widetilde{T}_{s,t}\widetilde{T}^*_{s,t})^{\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}},$$

すなわち $\widetilde{T}_{s,t}$ は $\frac{p+\min\{s,t\}}{s+t}$-hyponormal 作用素である.

(ii) T が p-hyponormal 作用素 ($p \geq \max\{s,t\}$) であることより, Theorem L-H を適用すると,

$$\text{(3)} \qquad |T|^{2s} \geq |T^*|^{2s},$$

$$\text{(4)} \qquad |T|^{2t} \geq |T^*|^{2t}.$$

また，(3), (4) より

(5) $$\widetilde{T}_{s,t}^*\widetilde{T}_{s,t} = |T|^tU^*|T|^{2s}U|T|^t \geq |T|^tU^*|T^*|^{2s}U|T|^t = |T|^{2(s+t)},$$

(6) $$\widetilde{T}_{s,t}\widetilde{T}_{s,t}^* = |T|^sU|T|^{2t}U^*|T|^s = |T|^s|T^*|^{2t}|T|^s \leq |T|^{2(s+t)}.$$

よって，(5), (6) より

$$\widetilde{T}_{s,t}^*\widetilde{T}_{s,t} \geq |T|^{2(s+t)} \geq \widetilde{T}_{s,t}\widetilde{T}_{s,t}^*,$$

すなわち $\widetilde{T}_{s,t}$ は hyponormal 作用素である. □

§3.4.2 log-hyponormal 作用素の Aluthge transformation

Definition 1. 可逆な作用素 T が $\log T^*T \geq \log TT^*$ を満たすとき，T は **log-hyponormal 作用素**であるという.

Theorem 1. T は可逆かつある $p > 0$ に対して p-hyponormal 作用素であるならば，T は log-hyponormal 作用素である.

Proof. T を可逆な p-hyponormal 作用素とすると，Theorem L-H より $p \geq q > 0$ に対して $(T^*T)^q \geq (TT^*)^q$. これを変形すると，

$$\frac{(T^*T)^q - I}{q} \geq \frac{(TT^*)^q - I}{q}$$

が成り立つ. よって，$q \to +0$ とすると

$$\log T^*T \geq \log TT^*$$

となり，T は log-hyponormal 作用素であることがわかる. □

Remark 1. Theorem 1 の証明における議論より log-hyponormal のことを 0-hyponormal ととらえることができる.

Theorem 2. log-hyponormal 作用素 T の極分解を $T = U|T|$ とする. このとき, $s > 0, t > 0$ に対して $\widetilde{T}_{s,t} = |T|^sU|T|^t$ は $\frac{\min\{s,t\}}{s+t}$-hyponormal 作用素である.

Proof. T を log-hyponormal 作用素，すなわち $\log|T|^2 \geq \log|T^*|^2$ が成り立つとすると，§3.2.3 の Theorem 2 より，任意の $p \geq 0$, $r \geq 0$ に対して

$$(1) \qquad |T|^{2p} \geq (|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^{\frac{p}{p+r}}$$

が成り立つ．また，§3.2.1 の Lemma A より (1) は

$$(2) \qquad (|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{r}{p+r}} \geq |T^*|^{2r}$$

が成り立つことと同値である．このとき，(2) と Theorem L-H より

$$\begin{aligned}(3)\quad (\widetilde{T}^*_{s,t}\widetilde{T}_{s,t})^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}} &= (|T|^tU^*|T|^{2s}U|T|^t)^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}} \\ &= (U^*U|T|^tU^*|T|^{2s}U|T|^tU^*U)^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}} \\ &= (U^*|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^tU)^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}} \\ &= U^*(|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^t)^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}}U \qquad \text{(Lemma 1 (iv) より)} \\ &\geq U^*|T^*|^{2\min\{s,t\}}U \\ &= |T|^{2\min\{s,t\}}.\end{aligned}$$

一方，(1) と Theorem L-H より

$$\begin{aligned}(4)\quad (\widetilde{T}_{s,t}\widetilde{T}^*_{s,t})^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}} &= (|T|^sU|T|^{2t}U^*|T|^s)^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}} \\ &= (|T|^s|T^*|^{2t}|T|^s)^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}} \\ &\leq |T|^{2\min\{s,t\}}.\end{aligned}$$

よって，(3), (4) より

$$(\widetilde{T}^*_{s,t}\widetilde{T}_{s,t})^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}} \geq |T|^{2\min\{s,t\}} \geq (\widetilde{T}_{s,t}\widetilde{T}^*_{s,t})^{\frac{\min\{s,t\}}{s+t}},$$

すなわち $\widetilde{T}_{s,t}$ は $\frac{\min\{s,t\}}{s+t}$-hyponormal 作用素である． □

Remark 2. log-hyponormal 作用素に対する Theorem 2 は，p-hyponormal 作用素に対する §3.3.1 の Theorem 2 において $p=0$ としたものと考えることができる．このことは，Remark 1 で述べた事実 (log-hyponormal のことを 0-hyponormal ととらえることができる) を鑑みると，きわめて自然な結果であることがわかる．

§3.4 に関するメモ・注釈・参考文献

A.Aluthge *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integral Equations Operator Theory, **13**(1990), 307–315.

M.Cho and M.Itoh *Putnam's inequality for p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **123**(1995), 2435–2440.

B.P.Duggal *On p-hyponormal contractions*, Proc. Amer. Math. Soc., **123**

(1995), 81–86.

T.Furuta *Generalized Aluthge transformation on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 3071–3075.

T.Furuta and M.Yanagida *Further extensions of Aluthge transformation on p-hyponormal operators*, Integral Equations Operator Theory, **29**(1997), 122–125.

T.Huruya *A note on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **125**(1997), 3617–3624 .

M.Ito *Some classes of operators associated with generalized Aluthge transformation*, SUT J. Math., **35**(1999), 149–165.

C.-S.Lin *Unifying approach to the study of p-hyponormal operators*, Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 579-584.

K.Tanahashi *On log-hyponormal operators*, Integral Equations Operator Theory, **34**(1999), 364-372.

D.Xia *Spectral Theory of Hyponormal Operators*, Birkhäuser-Verlag, Boston, 1983.

T.Yoshino *The p-hyponormality of the Aluthge transform*, Interdiscip. Inform. Sci., **3**(1997), 91-93.

p-hyponormal 作用素は hyponormal 作用素の拡張として [Xia 1983] で導入された．また，**Aluthge transformation** $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は [Aluthge 1990] で最初に導入された．

Aluthge transformation は作用素の研究において大変便利でおもしろい発想である．まず，§2.4.1 の Theorem 17 などにより Aluthge transformation $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は $T = U|T|$ と同じスペクトルをもつ．また，§3.4.1 の Theorem 1 で示した次の驚くべき事実に注目しなければならない．

> T が p-hyponormal 作用素 $(0 < p < \frac{1}{2})$ のとき，$\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は $(p + \frac{1}{2})$-hyponormal 作用素である．

この結果は，$\widetilde{T}$ ($(p+\frac{1}{2})$-hyponormal) がもとの T (p-hyponormal) より性質の良いクラスに属することを表している．

p-hyponormal 作用素や log-hyponormal 作用素に関しては多くの研究者によって研究がなされており，ここでそのすべてを紹介することは不可能である．

§3.4.1 の Theorem 1 は [Aluthge 1990] で示された．また，§3.4.1 の Theorem 2 は [Huruya 1997], [Yoshino 1997], [Furuta-Yanagida 1997] で，§3.4.2 の Theorem 2 は [Tanahashi 1999] でそれぞれ示された．本書における §3.4.1 の Theorem 2, §3.4.2 の Theorem 2 の証明は [Ito 1999] を引用した．

§3.5 paranormal, log-hyponormal に関連した作用素のクラスとその周辺

§3.5.1 class A 作用素と paranormal, log-hyponormal

本節において，特に断りのないときは $T \in B(H)$ とする.

T は **paranormal 作用素**であるとは，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$\|T^2 x\| \geq \|Tx\|^2$$

を満たすことであり，その性質については §2.6.1 で述べられている．本節では，まず，log-hyponormal を含み，paranormal に含まれる作用素のクラスである "**class A**" を導入する.

Definition 1. $|T^2| \geq |T|^2$ を満たすとき，T は **class A 作用素**であるという.

class A の定義は作用素不等式で与えられており，ノルム不等式で与えられた paranormal の定義と対応した形になっていることに注意しておく．なお，class "A" は作用素の絶対値 ("absolute" value) にちなんで名づけられたものである.

では，実際に class A が log-hyponormal を含み，paranormal に含まれる作用素のクラスであることを示す.

Theorem 1.

(i) T が log-hyponormal 作用素ならば，T は class A 作用素である.

(ii) T が class A 作用素ならば，T は paranormal 作用素である.

Proof. (i) T が log-hyponormal, すなわち，T は可逆で

$$\log |T|^2 \geq \log |T^*|^2$$

を満たすものとすると，§3.2.3 の Theorem 2 より，任意の $p \geq 0$ に対して

$$(1) \qquad |T|^{2p} \geq (|T|^p |T^*|^{2p} |T|^p)^{\frac{1}{2}}$$

である．そこで，(1) に $p=1$ を代入すると，

$$|T|^2 \geq (|T||T^*|^2|T|)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

§3.2.1 の Lemma A と $|T^*|^2 = TT^*$ より，(2) は

$$|T|^2 \geq |T|T(T^*|T|^2T)^{\frac{-1}{2}}T^*|T|,$$

さらには

$$(T^*|T|^2T)^{\frac{1}{2}} \geq T^*T$$

と同値であり，$|T|^2 = T^*T$ より

$$|T^2| \geq |T|^2$$

とも同値であるので，T は class A 作用素である．

(ii) T は class A 作用素，すなわち

$$|T^2| \geq |T|^2 \tag{3}$$

を満たすとすると，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|T^2x\|^2 &= ((T^2)^*T^2x, x) \\
&= (|T^2|^2x, x) \\
&\geq (|T^2|x, x)^2 \qquad (\text{§3.1.2 の Theorem H-M (i) より}) \\
&\geq (|T|^2x, x)^2 \qquad ((3) \text{ より}) \\
&= \|Tx\|^4.
\end{aligned}$$

よって，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$$

が成り立つので，T は paranormal 作用素である． □

§3.5.2 class A, paranormal を拡張した作用素のクラス

class A, paranormal の拡張である作用素のクラスをそれぞれ次のように定義する．

Definition 1. $k>0$ とする．

(i) 次の式を満たすとき，T は **class A(k) 作用素**であるという．

$$(T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2.$$

(ii) 任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して次の式を満たすとき，T は **absolute-k-paranormal 作用素** であるという．

$$\||T|^k Tx\| \geq \|Tx\|^{k+1}.$$

class A, paranormal はそれぞれ class A(k), absolute-k-paranormal において $k=1$ としたものとなっている．

この class A(k), absolute-k-paranormal に関する結果を証明する前に，次の Lemma 1 を証明しておく．

Lemma 1. A, B は可逆な正値作用素とし，ある $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$ に対して $A^{\beta_0} \geq (A^{\frac{\beta_0}{2}} B^{\alpha_0} A^{\frac{\beta_0}{2}})^{\frac{\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}}$ を満たすとする．このとき，任意の $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ に対して

$$A^{\beta} \geq (A^{\frac{\beta}{2}} B^{\alpha} A^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

が成り立つ．

Proof. $A^{\beta_0} \geq (A^{\frac{\beta_0}{2}} B^{\alpha_0} A^{\frac{\beta_0}{2}})^{\frac{\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}}$ に §3.2.1 の Theorem F_1 の (ii) を適用すると，任意の $p_1 \geq 1$, $r_1 \geq 0$ に対して

(1) $$A^{(1+r_1)\beta_0} \geq \{A^{\frac{\beta_0 r_1}{2}} (A^{\frac{\beta_0}{2}} B^{\alpha_0} A^{\frac{\beta_0}{2}})^{\frac{\beta_0 p_1}{\alpha_0+\beta_0}} A^{\frac{\beta_0 r_1}{2}}\}^{\frac{1+r_1}{p_1+r_1}}.$$

ここで，(1) において $p_1 = \dfrac{\alpha_0+\beta_0}{\beta_0} \geq 1$ とおくと，

$$A^{(1+r_1)\beta_0} \geq (A^{\frac{(1+r_1)\beta_0}{2}} B^{\alpha_0} A^{\frac{(1+r_1)\beta_0}{2}})^{\frac{(1+r_1)\beta_0}{\alpha_0+(1+r_1)\beta_0}}.$$

さらに $\beta = (1+r_1)\beta_0 \geq \beta_0$ とおくと，任意の $\beta \geq \beta_0$ に対して

(2) $$A^{\beta} \geq (A^{\frac{\beta}{2}} B^{\alpha_0} A^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha_0+\beta}}.$$

§3.2.1 の Lemma A より，(2) は

(3) $$(B^{\frac{\alpha_0}{2}} A^{\beta} B^{\frac{\alpha_0}{2}})^{\frac{\alpha_0}{\alpha_0+\beta}} \geq B^{\alpha_0}$$

と同値である．ここで，(3) において §3.2.1 の Theorem F_1 の (i) を適用すると，任意の $p_2 \geq 1$, $r_2 \geq 0$ に対して

(4) $$\{B^{\frac{\alpha_0 r_2}{2}} (B^{\frac{\alpha_0}{2}} A^{\beta} B^{\frac{\alpha_0}{2}})^{\frac{\alpha_0 p_2}{\alpha_0+\beta}} B^{\frac{\alpha_0 r_2}{2}}\}^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}} \geq B^{(1+r_2)\alpha_0}.$$

ここで，(4) において $p_2 = \dfrac{\alpha_0 + \beta}{\alpha_0} \geq 1$ とおくと，

$$(B^{\frac{(1+r_2)\alpha_0}{2}} A^\beta B^{\frac{(1+r_2)\alpha_0}{2}})^{\frac{(1+r_2)\alpha_0}{(1+r_2)\alpha_0+\beta}} \geq B^{(1+r_2)\alpha_0}.$$

さらに $\alpha = (1+r_2)\alpha_0 \geq \alpha_0$ とおくと，任意の $\alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \beta_0$ に対して

(5) $$(B^{\frac{\alpha}{2}} A^\beta B^{\frac{\alpha}{2}})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \geq B^\alpha.$$

したがって，§3.2.1 の Lemma A より，(5) は任意の $\alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \beta_0$ に対して

$$A^\beta \geq (A^{\frac{\beta}{2}} B^\alpha A^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

であることと同値である．よって Lemma 1 は示された． □

Theorem 1.

(i) T が log-hyponormal 作用素ならば, T は $k > 0$ に対して class A(k) 作用素である.

(ii) T が可逆な class A 作用素ならば，T は $k \geq 1$ に対して class A(k) 作用素である.

(iii) T が paranormal 作用素ならば，T は $k \geq 1$ に対して absolute-k-paranormal 作用素である.

(iv) ある $k > 0$ に対して T が class A(k) 作用素ならば，T は absolute-k-paranormal 作用素である.

Proof. (i) T が log-hyponormal, すなわち，T は可逆で

(6) $$\log |T|^2 \geq \log |T^*|^2$$

を満たすものとする．また，§3.2.3 の Theorem 2 より，(6) は任意の $p \geq 0, r \geq 0$ に対して

(7) $$|T|^{2p} \geq (|T|^r |T^*|^{2p} |T|^r)^{\frac{r}{p+r}}$$

であることと同値である．そこで，(7) に $p = 1, r = k > 0$ を代入すると，

(8) $$|T|^{2k} \geq (|T|^k |T^*|^2 |T|^k)^{\frac{k}{k+1}}.$$

よって，§3.2.1 の Lemma A と $|T^*|^2 = TT^*$ より，(8) は

$$|T|^{2k} \geq |T|^k T (T^* |T|^{2k} T)^{\frac{-1}{k+1}} T^* |T|^k,$$

さらには

$$(T^* |T|^{2k} T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2$$

と同値である．ゆえに，$k>0$ に対して T は class A(k) 作用素である．

(ii) T は class A 作用素，すなわち $|T^2| \geq |T|^2$ を満たすとすると，これは

$$(T^*|T|^2T)^{\frac{1}{2}} \geq T^*T \tag{9}$$

と同値である．また，§3.2.1 の Lemma A より (9) は

$$T^*|T|(|T|TT^*|T|)^{\frac{-1}{2}}|T|T \geq T^*T,$$

さらには

$$|T|^2 \geq (|T||T^*|^2|T|)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

と同値である．ここで (10) に Lemma 1 を適用すると，任意の $k \geq 1$ に対して

$$|T|^{2k} \geq (|T|^k|T^*|^2|T|^k)^{\frac{k}{k+1}}. \tag{11}$$

また，§3.2.1 の Lemma A と $|T^*|^2 = TT^*$ より，(11) は

$$|T|^{2k} \geq |T|^kT(T^*|T|^{2k}T)^{\frac{-1}{k+1}}T^*|T|^k,$$

さらには

$$(T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2$$

と同値である．よって，$k \geq 1$ に対して T は class A(k) 作用素である．

(iii) T は paranormal 作用素である，すなわち，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ を満たすとする．このとき，任意の単位ベクトル $x \in H$ と $k \geq 1$ に対して，

$$\begin{aligned}\big\||T|^kTx\big\|^2 &= (|T|^{2k}Tx, Tx)\\ &\geq (|T|^2Tx, Tx)^k\big\|Tx\big\|^{2(1-k)} \quad (\text{§3.1.2 の Theorem H-M (i}') \text{ より})\\ &= \big\|T^2x\big\|^{2k}\big\|Tx\big\|^{2(1-k)}\\ &\geq \big\|Tx\big\|^{4k}\|Tx\|^{2(1-k)} \quad (\text{paranormal 作用素の定義より})\\ &= \big\|Tx\big\|^{2(k+1)}.\end{aligned}$$

よって，任意の単位ベクトル $x \in H$ と $k \geq 1$ に対して

$$\big\||T|^kTx\big\| \geq \big\|Tx\big\|^{k+1}$$

が成り立つので，$k \geq 1$ に対して T は absolute-k-paranormal 作用素である．

(iv) ある $k>0$ に対して T は class A(k) 作用素である，すなわち

$$(T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2 \tag{12}$$

を満たすとする．このとき，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して，

$$\big\||T|^kTx\big\|^2 = (T^*|T|^{2k}Tx, x)$$

$$\geq ((T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}}x, x)^{k+1} \qquad (\text{§3.1.2 の Theorem H-M (i) より})$$
$$\geq (|T|^2x, x)^{k+1} \qquad ((12)\text{ より})$$
$$= \|Tx\|^{2(k+1)}.$$

よって，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$\||T|^kTx\| \geq \|Tx\|^{k+1}$$

が成り立つので，T は absolute-k-paranormal である． □

§3.5.3 §3.5.2 の Theorem 1 の拡張

さらに，§3.5.2 の Theorem 1 (ii), (iii) の拡張である次の結果を示す．

Theorem 1. ある $k > 0$ に対して，T を可逆な class A(k) 作用素とする．このとき，

$$f(l) = (T^*|T|^{2l}T)^{\frac{1}{l+1}}$$

は $l \geq k > 0$ で l の単調増加関数である．さらに，$f(l) \geq |T|^2$ が成り立つ．すなわち，$l \geq k > 0$ に対して T は class A(l) 作用素である．

Theorem 2. ある $k > 0$ に対して，T を absolute-k-paranormal 作用素とする．このとき，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$F(l) = \||T|^lTx\|^{\frac{1}{l+1}}$$

は $l \geq k > 0$ で l の単調増加関数である．さらに，$F(l) \geq \|Tx\|$ が成り立つ．すなわち，$l \geq k > 0$ に対して T は absolute-l-paranormal 作用素である．

Remark 1. Theorem 1 は，ある $k > 0$ に対して T が class A(k) 作用素であるならば，$l \geq k > 0$ なる l に対して T は class A(l) 作用素であり，さらにそのことは作用素関数 $f(l)$ が l についての単調増加関数であるという形で表現できる，ということを主張している．同様に Theorem 2 は，ある $k > 0$ に対して T が absolute-k-paranormal 作用素であるならば，$l \geq k > 0$ なる l に対して T は absolute-l-paranormal 作用素であり，さらにそのことはノルムで表現された関数 $F(l)$ が l についての単調増加関数であるという形で表現できる，ということを主張している．

Theorem 1 の証明のために，次の Lemma 1 が必要である．

Lemma 1. A, B は可逆な正値作用素とし，ある $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ に対して $A^{\beta_0} \geq (A^{\frac{\beta_0}{2}} B^{\alpha_0} A^{\frac{\beta_0}{2}})^{\frac{\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}}$ を満たすとする．このとき，ある $\delta \geq -\beta_0$ に対して

$$f(\alpha,\beta) = A^{\frac{-\beta}{2}}(A^{\frac{\beta}{2}} B^{\alpha} A^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{\delta+\beta}{\alpha+\beta}} A^{\frac{-\beta}{2}}$$

は，$\alpha \geq \max\{\delta, \alpha_0\}$, $\beta \geq \beta_0$ で α, β の単調減少関数である．

§3.3.2 の Theorem 1 と同様の方法で証明できるので，ここでは証明は省略する．

Proof of Theorem 1. ある $k > 0$ に対して，T が class A(k) 作用素であることの定義より，

$$f(k) = (T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2 \tag{1}$$

が成り立つ．また §3.2.1 の Lemma A より，(1) は

$$|T|^{2k} \geq (|T|^k|T^*|^2|T|^k)^{\frac{k}{k+1}} \tag{2}$$

と同値である．ここで (2) に Lemma 1 を適用すると，

$$g(l) = |T|^{-l}(|T|^l|T^*|^2|T|^l)^{\frac{l}{l+1}}|T|^{-l}$$

は $l \geq k > 0$ に対して単調減少である．また，

$$\begin{aligned} g(l) &= |T|^{-l}(|T|^l|T^*|^2|T|^l)^{\frac{l}{l+1}}|T|^{-l} \\ &= |T|^{-l}(|T|^lTT^*|T|^l)^{\frac{l}{l+1}}|T|^{-l} \\ &= T(T^*|T|^{2l}T)^{\frac{-1}{l+1}}T^* \qquad (\S 3.2.1 \text{ の Lemma A より}) \\ &= T\{(T^*|T|^{2l}T)^{\frac{1}{l+1}}\}^{-1}T^* \\ &= T\{f(l)\}^{-1}T^*. \end{aligned}$$

よって，$f(l)$ は $l \geq k > 0$ に対して単調増加である．

さらに，$f(l)$ が $l \geq k > 0$ に対して単調増加であることと T が class A(k) 作用素であることより，

$$(T^*|T|^{2l}T)^{\frac{1}{l+1}} = f(l) \geq f(k) \geq |T|^2.$$

ゆえに，$l \geq k > 0$ に対して T は class A(l) 作用素である． □

Proof of Theorem 2. ある $k>0$ に対して T が absolute-k-paranormal 作用素であることの定義より，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$F(k) = \left\| |T|^k Tx \right\|^{\frac{1}{k+1}} \geq \|Tx\| \tag{3}$$

が成り立つ．このとき，任意の単位ベクトル $x \in H$ と $l \geq k > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
F(l) &= \left\| |T|^l Tx \right\|^{\frac{1}{l+1}} \\
&= (|T|^{2l} Tx, Tx)^{\frac{1}{2(l+1)}} \\
&\geq \left\{ (|T|^{2k} Tx, Tx)^{\frac{l}{k}} \|Tx\|^{2\left(1-\frac{l}{k}\right)} \right\}^{\frac{1}{2(l+1)}}
\end{aligned}$$

(§3.1.2 の Theorem H-M (i′) より)

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left\| |T|^k Tx \right\|^{\frac{2l}{k}} \|Tx\|^{2\left(1-\frac{l}{k}\right)} \right\}^{\frac{1}{2(l+1)}} \\
&\geq \left\{ \|Tx\|^{\frac{2l(k+1)}{k}} \|Tx\|^{2\left(1-\frac{l}{k}\right)} \right\}^{\frac{1}{2(l+1)}} \qquad ((3) \text{ より}) \\
&= \|Tx\|.
\end{aligned}$$

よって，任意の単位ベクトル $x \in H$ と $l \geq k > 0$ に対して

$$F(l) = \left\| |T|^l Tx \right\|^{\frac{1}{l+1}} \geq \|Tx\| \tag{4}$$

が成り立つので，$l \geq k > 0$ に対して T は absolute-l-paranormal 作用素である．

さらに，任意の単位ベクトル $x \in H$ と $m \geq l \geq k > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
F(m) &= \left\| |T|^m Tx \right\|^{\frac{1}{m+1}} \\
&= (|T|^{2m} Tx, Tx)^{\frac{1}{2(m+1)}} \\
&\geq \left\{ (|T|^{2l} Tx, Tx)^{\frac{m}{l}} \|Tx\|^{2\left(1-\frac{m}{l}\right)} \right\}^{\frac{1}{2(m+1)}}
\end{aligned}$$

(§3.1.2 の Theorem H-M (i′) より)

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left\| |T|^l Tx \right\|^{\frac{2m}{l}} \|Tx\|^{2\left(1-\frac{m}{l}\right)} \right\}^{\frac{1}{2(m+1)}} \\
&\geq \left\{ \left\| |T|^l Tx \right\|^{\frac{2m}{l}} \left\| |T|^l Tx \right\|^{\frac{2}{l+1}\left(1-\frac{m}{l}\right)} \right\}^{\frac{1}{2(m+1)}} \qquad ((4) \text{ より}) \\
&= \left\| |T|^l Tx \right\|^{\frac{1}{l+1}} \\
&= F(l).
\end{aligned}$$

ゆえに，$F(l)$ は $l \geq k > 0$ に対して単調増加である． □

§3.5.4 absolute-k-paranormal 作用素は normaloid 作用素である

§2.6.1 の Theorem 2 で，任意の paranormal 作用素は normaloid 作用素であることを示したが，ここではこの結果の拡張である次の定理を示す．

Theorem 1. ある $k>0$ に対して T が absolute-k-paranormal 作用素ならば，T は normaloid 作用素である．

Proof. T は absolute-k-paranormal 作用素とする．$0<k<1$ の場合，§3.5.3 の Theorem 2 と §2.6.1 の Theorem 2 より

$$\text{absolute-}k\text{-paranormal} \Longrightarrow \text{paranormal} \Longrightarrow \text{normaloid}$$

なので，$k\geq 1$ の場合のみを考えればよい．また，$\|T\|=1$ であると仮定しても一般性を失わない．

このとき $\|T^n\|\leq\|T\|^n=1$ に注意すると，absolute-k-paranormal 作用素の定義より，任意の単位ベクトル $x\in H$ に対して

$$\begin{aligned}\|Tx\|^{k+1} &\leq \||T|^kTx\| \\ &\leq \||T|^{k-1}\|\,\||T|Tx\| \\ &\leq \|T^2x\|\leq\|T^2\|\leq 1\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，任意のベクトル $x\in H$ に対して

(1) $$\frac{\|Tx\|^{k+1}}{\|x\|^k}\leq\|T^2x\|\leq\|x\|.$$

ここで，$\{x_j\}$ を

(2) $$\|x_j\|=1, \qquad \|Tx_j\|\to 1$$

を満たす (単位) ベクトル列とする．このとき，(1) において $x=x_j$ とおくと，

(3) $$\frac{\|Tx_j\|^{k+1}}{\|x_j\|^k}\leq\|T^2x_j\|\leq\|x_j\|=1.$$

よって，(2), (3) より $\|T^2x_j\|\to 1$ なので，$\|T^2\|=1=\|T\|^2$.

次に，$n\geq 2$ に対して

(4) $$\|T^{n-2}x_j\|\to 1, \qquad \|T^{n-1}x_j\|\to 1$$

であると仮定する．このとき，(1) において $x=T^{n-2}x_j$ とおくと，

(5) $$\frac{\|T^{n-1}x_j\|^{k+1}}{\|T^{n-2}x_j\|^k}\leq\|T^nx_j\|\leq\|T^{n-2}x_j\|.$$

よって，(4), (5) より $\|T^nx_j\|\to 1$ なので，$\|T^n\|=1=\|T\|^n$.

ゆえに，帰納法により任意の自然数 n に対して $\|T^n\|=1=\|T\|^n$ であることが示されたので，§2.5.4 の Theorem 2 より T は normaloid 作用素である． □

§3.5.5 absolute-k-paranormal 作用素の特徴づけ

Theorem 1. ある $k>0$ に対して，T が absolute-k-paranormal 作用素であることと

$$T^*|T|^{2k}T-(k+1)\lambda^k|T|^2+k\lambda^{k+1}\geq 0$$

が任意の $\lambda>0$ で成り立つことは同値である.

Theorem 1 の証明の前に次のよく知られた結果をあげておく.

Lemma 1. a, b を正の実数とする．このとき，$\lambda\geq 0, \mu\geq 0, \lambda+\mu=1$ である任意の λ, μ に対して

$$a^\lambda b^\mu\leq\lambda a+\mu b$$

が成り立つ.

Proof. $k>0$ に対して T は absolute-k-paranormal 作用素，すなわち，任意の単位ベクトル $x\in H$ に対して

(1) $$\left\||T|^kTx\right\|\geq\|Tx\|^{k+1}$$

を満たすとする．(1) は任意のベクトル $x\in H$ に対して

$$\left\||T|^kTx\right\|^{\frac{1}{k+1}}\|x\|^{\frac{k}{k+1}}\geq\|Tx\|$$

を満たすことと同値であり，さらには，任意のベクトル $x\in H$ に対して

(2) $$(T^*|T|^{2k}Tx,x)^{\frac{1}{k+1}}(x,x)^{\frac{k}{k+1}}\geq(|T|^2x,x)$$

を満たすことと同値である．また，Lemma 1 より，任意のベクトル $x\in H$ と任意の $\lambda>0$ に対して

(3) $$\begin{aligned}(T^*|T|^{2k}Tx,x)^{\frac{1}{k+1}}(x,x)^{\frac{k}{k+1}}&=\left\{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k(T^*|T|^{2k}Tx,x)\right\}^{\frac{1}{k+1}}\cdot\{\lambda(x,x)\}^{\frac{k}{k+1}}\\&\leq\frac{1}{k+1}\frac{1}{\lambda^k}(T^*|T|^{2k}Tx,x)+\frac{k}{k+1}\lambda(x,x).\end{aligned}$$

よって，(2) と (3) より，任意のベクトル $x\in H$ と任意の $\lambda>0$ に対して

(4) $$\frac{1}{k+1}\frac{1}{\lambda^k}(T^*|T|^{2k}Tx,x)+\frac{k}{k+1}\lambda(x,x)\geq(|T|^2x,x)$$

が成り立つ.

逆に，(4) において，$(T^*|T|^{2k}Tx, x) \neq 0$ のとき $\lambda = \left\{ \dfrac{(T^*|T|^{2k}Tx, x)}{(x, x)} \right\}^{\frac{1}{k+1}}$ とおくと (2) を得る．$(T^*|T|^{2k}Tx, x) = 0$ の場合は $\lambda \to 0$ とすればよい．

よって，(2) と (4) は同値であり，さらに (4) は

$$T^*|T|^{2k}T - (k+1)\lambda^k|T|^2 + k\lambda^{k+1} \geq 0$$

が任意の $\lambda > 0$ で成り立つことと同値であるので，Theorem 1 は示された．□

Theorem 1 において $k = 1$ とすると，次の Theorem 2 を得る．

Theorem 2. T が paranormal 作用素であることと

$$T^{*^2}T^2 - 2\lambda T^*T + \lambda^2 \geq 0$$

が任意の $\lambda > 0$ で成り立つことは同値である．

§3.5.6　本節で紹介した作用素のクラスの包含関係に関する例

次の Proposition 1 は簡単な計算により得ることができるので，結果のみをあげておく．

Proposition 1. $K = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} H_n$ (各 H_n は H と同型) とする．また，$A, B \in B(H)$ に対して $T_{A,B} \in B(K)$ を次のように定める．

$$(1) \qquad T_{A,B} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & B & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & B & \boxed{0} & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & A & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & A & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & A & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ただし，$\boxed{0}$ は行列の (0, 0) 成分を表すものとする．このとき次が成り立つ．

(i) $T_{A,B}$ が log-hyponormal 作用素であることと，作用素 A, B が可逆，かつ

$$\log A \geq \log B$$

を満たすことは同値である．

(ii) ある $k > 0$ に対して $T_{A,B}$ が class A(k) 作用素であることと，

$$(BA^{2k}B)^{\frac{1}{k+1}} \geq B^2$$

が成り立つことは同値である．

(iii) $T_{A,B}$ が class A 作用素であることと，

$$(BA^2B)^{\frac{1}{2}} \geq B^2$$

が成り立つことは同値である．

(iv) ある $k > 0$ に対して $T_{A,B}$ が absolute-k-paranormal 作用素であることと，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$BA^{2k}B - (k+1)\lambda^k B^2 + k\lambda^{k+1} \geq 0$$

が成り立つことは同値である．

(v) $T_{A,B}$ が paranormal 作用素であることと，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$BA^2B - 2\lambda B^2 + \lambda^2 \geq 0$$

が成り立つことは同値である．

この Proposition 1 を使って，§3.5 で議論した作用素のクラスの包含関係がすべて proper (真) であることを示す具体例をあげる．なお，ここでは行列 X のトレースと行列式をそれぞれ $\operatorname{tr} X$, $\det X$ と表すものとする．

以下，$K = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} H_n$ (各 H_n は $\mathbb{R}^2$ と同型) とする．また，$A, B \in B(\mathbb{R}^2)$ に対して $T_{A,B} \in B(K)$ を Proposition 1 の (1) のように定める．

Example 1. log-hyponormal ではないが，class A である作用素．

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^2, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^2$$

とする．このとき，

$$A^2-(AB^2A)^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}135716.49504\ldots & 62374.58231\ldots\\ 62374.58231\ldots & 28669.17453\ldots\end{pmatrix}$$

である．また，$A^2-(AB^2A)^{\frac{1}{2}}$ の固有値は $164383.89711\ldots$, $1.77246\ldots$ であるので $A^2\geq(AB^2A)^{\frac{1}{2}}$．よって，§3.2.1 の Lemma A より $A^2\geq(AB^2A)^{\frac{1}{2}}$ と $(BA^2B)^{\frac{1}{2}}\geq B^2$ は同値なので，Proposition 1 の (iii) より $T_{A,B}$ は class A 作用素である．

一方，

$$A-(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}309.39438\ldots & 138.04008\ldots\\ 138.04008\ldots & 60.06152\ldots\end{pmatrix}$$

である．また，$A-(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ の固有値は $370.73006\ldots$, $-1.27415\ldots$ であるので $A\not\geq(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$．§3.2.3 の Theorem 2, すなわち $\log A\geq\log B$ と任意の $p\geq 0$, $r\geq 0$ に対して $A^r\geq(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$ が成り立つことが同値であることの対偶を考えると，$\log A\not\geq\log B$．よって，Proposition 1 の (i) より $T_{A,B}$ は log-hyponormal 作用素ではない． □

Example 2. class A ではないが，class A(2), paranormal である作用素．

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\sqrt{23}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$(BA^2B)^{\frac{1}{2}}-B^2=\begin{pmatrix}0.17472\ldots & -3.1798\ldots\\ -3.1798\ldots & 11.770\ldots\end{pmatrix}$$

である．また，$(BA^2B)^{\frac{1}{2}}-B^2$ の固有値は $12.585\ldots$, $-0.64001\ldots$ なので，$(BA^2B)^{\frac{1}{2}}\not\geq B^2$．よって，Proposition 1 の (iii) より $T_{A,B}$ は class A 作用素ではない．

一方，

$$(BA^4B)^{\frac{1}{3}}-B^2=\begin{pmatrix}3.9481\ldots & -8.6943\ldots\\ -8.6943\ldots & 21.128\ldots\end{pmatrix}$$

である．また，$(BA^4B)^{\frac{1}{3}}-B^2$ の固有値は $24.760\ldots$, $0.31608\ldots$ なので，$(BA^4B)^{\frac{1}{3}}\geq B^2$．よって，Proposition 1 の (ii) より $T_{A,B}$ は class A(2) 作用

素である．

さらに，$\lambda > 0$ に対して $X_1(\lambda)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} X_1(\lambda) &= BA^2B - 2\lambda B^2 + \lambda^2 \\ &= \begin{pmatrix} 404 - 26\lambda + \lambda^2 & -576 + 24\lambda \\ -576 + 24\lambda & 844 - 26\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで，$p_1(\lambda) = \operatorname{tr} X_1(\lambda)$, $q_1(\lambda) = \det X_1(\lambda)$ とすると，

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= 2\lambda^2 - 52\lambda + 1248 \\ &= 2(\lambda - 13)^2 + 910 > 0, \\ q_1(\lambda) &= (404 - 26\lambda + \lambda^2)(844 - 26\lambda + \lambda^2) - (-576 + 24\lambda)^2 \\ &= \lambda^4 - 52\lambda^3 + 1348\lambda^2 - 4800\lambda + 9200. \end{aligned}$$

$q_1(\lambda)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} q_1'(\lambda) &= 4\lambda^3 - 156\lambda^2 + 2696\lambda - 4800 \\ &= 4(\lambda - 2)(\lambda^2 - 37\lambda + 600) \\ &= 4(\lambda - 2)\left\{\left(\lambda - \frac{37}{2}\right)^2 + \frac{1031}{4}\right\}. \end{aligned}$$

よって，$q_1'(\lambda) = 0$ のとき $\lambda = 2$ であるので，任意の $\lambda > 0$ に対して $q_1(\lambda) \geq q_1(2) = 4592 > 0$ である．ゆえに, 任意の $\lambda > 0$ に対して $\operatorname{tr} X_1(\lambda) = p_1(\lambda) > 0$ かつ $\det X_1(\lambda) = q_1(\lambda) > 0$ なので，$X_1(\lambda) \geq 0$ である．よって，Proposition 1 の (v) より $T_{A,B}$ は paranormal である． □

Example 3. class A(2) ではないが, absolute-2-paranormal である作用素.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}^{\frac{1}{4}}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$(BA^4B)^{\frac{1}{3}} - B^2 = \begin{pmatrix} -0.0091543\ldots & 0.44289\ldots \\ 0.44289\ldots & 1.2774\ldots \end{pmatrix}$$

である．また，$(BA^4B)^{\frac{1}{3}} - B^2$ の固有値は $1.4151\ldots$, $-0.14687\ldots$ なので，$(BA^4B)^{\frac{1}{3}} \not\geq B^2$．よって，Proposition 1 の (iii) より $T_{A,B}$ は class A(2) 作用素ではない．

一方，任意の $\lambda > 0$ に対して，$X_2(\lambda)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} X_2(\lambda) &= BA^4B - 3\lambda^2 B^2 + 2\lambda^3 \\ &= \begin{pmatrix} 24 - 8\sqrt{3} - 6\lambda^2 + 2\lambda^3 & -12 + 3\lambda^2 \\ -12 + 3\lambda^2 & 24 + 8\sqrt{3} - 6\lambda^2 + 2\lambda^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで $p_2(\lambda) = \operatorname{tr} X_2(\lambda)$, $q_2(\lambda) = \det X_2(\lambda)$ とすると，

$$\begin{aligned} p_2(\lambda) &= 4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 48, \\ q_2(\lambda) &= (24 - 8\sqrt{3} - 6\lambda^2 + 2\lambda^3)(24 + 8\sqrt{3} - 6\lambda^2 + 2\lambda^3) - (-12 + 3\lambda^2)^2 \\ &= 4\lambda^6 - 24\lambda^5 + 27\lambda^4 + 96\lambda^3 - 216\lambda^2 + 240. \end{aligned}$$

任意の $\lambda > 0$ に対して $p_2(\lambda) > 0$ であることは簡単にわかる．また，$q_2(\lambda)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} q_2'(\lambda) &= 24\lambda^5 - 120\lambda^4 + 108\lambda^3 + 288\lambda^2 - 432\lambda \\ &= 12\lambda(\lambda - 2)(2\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 18). \end{aligned}$$

任意の $\lambda > 0$ に対して $2\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 18 > 0$ であることは簡単にわかるので，$q_2'(\lambda) = 0$ のとき $\lambda = 0, 2$ である．よって，任意の $\lambda > 0$ に対して $q_2(\lambda) \geq q_2(2) = 64 > 0$ である．ゆえに任意の $\lambda > 0$ に対して，$\operatorname{tr} X_2(\lambda) = p_2(\lambda) > 0$ かつ $\det X_2(\lambda) = q_2(\lambda) > 0$ なので $X_2(\lambda) \geq 0$ である．よって，Proposition 1 の (iv) より $T_{A,B}$ は absolute-2-paranormal 作用素である．　□

Example 4. paranormal ではないが，absolute-2-paranormal である作用素．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，任意の $\lambda > 0$ に対して $X_2(\lambda)$ を次のように定義する．

$$X_3(\lambda) = BA^2B - 2\lambda B^2 + \lambda^2 = \begin{pmatrix} 8 - 8\lambda + \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(2) において $\lambda = 4$ とすると，

$$X_3(4) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \ngeq 0$$

である．よって，Proposition 1 の (v) より $T_{A,B}$ は paranormal 作用素では

ない.

一方，任意の $\lambda > 0$ に対して $X_4(\lambda)$ を次のように定義する.

$$X_4(\lambda) = BA^4B - 3\lambda^2 B^2 + 2\lambda^3 = \begin{pmatrix} 80 - 12\lambda^2 + 2\lambda^3 & 0 \\ 0 & 2\lambda^3 \end{pmatrix}.$$

任意の $\lambda > 0$ に対して $80 - 12\lambda^2 + 2\lambda^3 > 0$ であることが簡単にわかるので，$X_4(\lambda) \geq 0$ である．ゆえに，Proposition 1 の (iv) より $T_{A,B}$ は absolute-2-paranormal 作用素である. □

Example 5. 任意の $k > 0$ に対して absolute-k-paranormal ではないが，normaloid である作用素.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，任意の自然数 n に対して $\|T^n\| = \|T\|^n$ であることは簡単にわかる．よって，§2.5.4 の Theorem 2 より T は normaloid 作用素である．しかし，

$$|T|^k T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であることより，$\||T|^k Tx\| \geq \|Tx\|^{k+1}$ は単位ベクトル $x = e_2 = (0, 1, 0)$ に対しては成り立たない．よって，T は任意の $k > 0$ に対して absolute-k-paranormal 作用素ではない. □

Definition 1. ある $k > 0$ に対して

$$(T^*T)^k \geq (TT^*)^k$$

を満たすとき，T は **k-hyponormal 作用素**であるというが，これに対し，ある $k > 0$ に対して

$$T^*(T^*T)^k T \geq T^*(TT^*)^k T$$

を満たすとき，T は **k-quasihyponormal 作用素** であるという．このことは T が $\overline{R(T)}$ 上で k-hyponormal 作用素であるといい換えることもでき

る．また，特に 1-quasihyponormal 作用素のことを **quasihyponormal 作用素**とよぶ．

Proposition 2. ある $k > 0$ に対して，次が成り立つ．

(i) T が k-quasihyponormal 作用素ならば，T は class A(k) 作用素である．

(ii) T が k-hyponormal 作用素ならば，T は class A(k) 作用素である．

Proof. (i) ある $k > 0$ に対して，T は k-quasihyponormal 作用素である，すなわち，

$$T^*(T^*T)^k T \geq T^*(TT^*)^k T$$

を満たすとすると，§3.1.2 の Lemma A より

$$T^*|T|^{2k}T \geq |T|^{2(k+1)}.$$

よって，§3.1.2 の Theorem L-H より

$$(T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2,$$

すなわち T は class A(k) 作用素である．

(ii) k-Hyponormal $\Longrightarrow$ k-quasihyponormal と (i) よりわかる． □

Remark 1. T が可逆のとき，Proposition 2 の (ii) は k-hyponormal $\Longrightarrow$ log-hyponormal $\Longrightarrow$ class A(k) より明らかである．

Remark 2. §3.5 で議論した作用素のクラスの関係を図にまとめると Figure 22 のようになる．

§3.5.7 p-hyponormal 作用素のべき乗

Theorem 1. ある $p \in (0,1]$ に対して，T は p-hyponormal 作用素とする．このとき，任意の自然数 n に対して次の不等式が成り立つ．

(i) $(T^{n*}T^n)^{\frac{p+1}{n}} \geq (T^*T)^{p+1}$.

(ii) $(TT^*)^{p+1} \geq (T^nT^{n*})^{\frac{p+1}{n}}$.

Proof. $T = U|T|$ はある $p \in (0,1]$ に対する p-hyponormal 作用素 T の極分解とする．このとき，§2.2.2 の Theorem 5 より $T^* = U^*|T^*|$ は T^* の極分解であることに

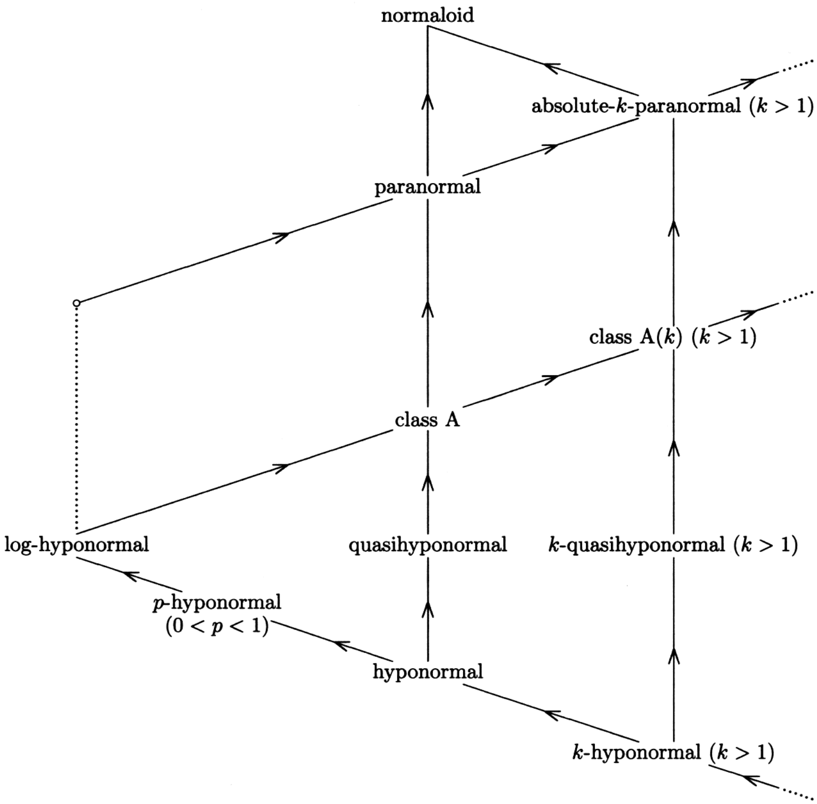


Figure 22　§3.5 に関する定義.

注意する.

自然数 n に対して,

$$A_n = (T^{n*}T^n)^{\frac{p}{n}} = |T^n|^{\frac{2p}{n}}, \qquad B_n = (T^nT^{n*})^{\frac{p}{n}} = |T^{n*}|^{\frac{2p}{n}}$$

とする. 以下, (i) と (ii) を帰納法で示す.

(i) $n = 1$ のときは明らかに成り立つ. $n = k$ のとき

(1) $$(T^{k^*}T^k)^{\frac{p+1}{k}} \geq (T^*T)^{p+1}$$

が成り立つと仮定する. このとき, $\dfrac{p}{p+1} \in [0,1]$ より (1) に §3.2.1 の Theorem L-H を適用すると, p-hyponormal 作用素の定義とあわせて次の式を得る.

$$A_k = (T^{k^*}T^k)^{\frac{p}{k}} \geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p = B_1.$$

ここで，$\frac{k}{p} \geq 1$, $\frac{1}{p} \geq 0$ に対して §3.2.1 の Theorem F_1 の (i) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
(T^{k+1^*}T^{k+1})^{\frac{p+1}{k+1}} &= (U^*|T^*|T^{k^*}T^k|T^*|U)^{\frac{p+1}{k+1}} \\
&= U^*(|T^*|T^{k^*}T^k|T^*|)^{\frac{p+1}{k+1}}U \qquad (\text{§3.4.1 の Lemma 1 (iv) より}) \\
&= U^*(B_1^{\frac{1}{2p}}A_k^{\frac{k}{p}}B_1^{\frac{1}{2p}})^{\frac{1+\frac{1}{p}}{\frac{k}{p}+\frac{1}{p}}}U \\
&\geq U^*B_1^{1+\frac{1}{p}}U \\
&= U^*|T^*|^{2(p+1)}U \\
&= |T|^{2(p+1)} = (T^*T)^{p+1}.
\end{aligned}
$$

よって，$n = k+1$ に対して (1) が成り立つので，帰納法により (i) は証明された．

(ii) $n = 1$ のときは明らかに成り立つ．$n = k$ のとき

$$
(TT^*)^{p+1} \geq (T^kT^{k^*})^{\frac{p+1}{k}} \tag{2}
$$

が成り立つと仮定する．このとき，$\frac{p}{p+1} \in [0,1]$ より (2) に §3.2.1 の Theorem L-H を適用すると，p-hyponormal 作用素の定義とあわせて次の式を得る．

$$
A_1 = (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \geq (T^kT^{k^*})^{\frac{p}{k}} = B_k.
$$

ここで，$\frac{k}{p} \geq 1$, $\frac{1}{p} \geq 0$ に対して §3.2.1 の Theorem F_1 の (ii) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
(T^{k+1}T^{k+1^*})^{\frac{p+1}{k+1}} &= (U|T|T^kT^{k^*}|T|U^*)^{\frac{p+1}{k+1}} \\
&= U(|T|T^kT^{k^*}|T|)^{\frac{p+1}{k+1}}U^* \qquad (\text{§3.4.1 の Lemma 1 (iii) より}) \\
&= U(A_1^{\frac{1}{2p}}B_k^{\frac{k}{p}}A_1^{\frac{1}{2p}})^{\frac{1+\frac{1}{p}}{\frac{k}{p}+\frac{1}{p}}}U^* \\
&\leq UA_1^{1+\frac{1}{p}}U^* \\
&= U|T|^{2(p+1)}U^* \\
&= |T^*|^{2(p+1)} = (TT^*)^{p+1}.
\end{aligned}
$$

よって，$n = k+1$ に対して (2) が成り立つので，帰納法により (ii) は証明された．　□

Corollary 2. ある $p \in (0,1]$ に対して，T は p-hyponormal 作用素とする．このとき，任意の自然数 n に対して次の不等式が成り立つ．

$$
(T^{n^*}T^n)^{\frac{p}{n}} \geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \geq (T^nT^{n^*})^{\frac{p}{n}}.
$$

Proof. §3.2.1 の Theorem L-H より Theorem 1 (i), (ii) の両辺を $\frac{p}{p+1}$ ($\in [0,1]$) 乗すると，それぞれ

$$(T^{n*}T^n)^{\frac{p}{n}} \geq (T^*T)^p, \qquad (TT^*)^p \geq (T^nT^{n*})^{\frac{p}{n}}$$

となる．よって，1 番目と 3 番目の不等式が成り立つ．また，2 番目の不等式は p-hyponormal 作用素の定義より成り立つ． □

Corollary 2 より，次の結果が成り立つ．

Corollary 3. ある $p \in (0,1]$ に対して，T は p-hyponormal 作用素とする．このとき，自然数 n に対して T^n は $\frac{p}{n}$-hyponormal 作用素である．

Remark 1. §2.7.2 の Example 3 では，T が hyponormal 作用素のとき T^2 は hyponormal 作用素であるとは限らないが，paranormal 作用素であることを述べた．それに対して，Corollary 3 では T が hyponormal 作用素のとき T^2 は $\frac{1}{2}$-hyponormal 作用素であることを示している．任意の $\frac{1}{2}$-hyponormal 作用素は paranormal 作用素であるので，Corollary 3 は §2.7.2 の Example 3 で述べた事実より精密な結果となっている．

§3.5 に関するメモ・注釈・参考文献

T.Ando *Operators with a norm condition*, Acta Sci. Math. (Szeged), **33**(1972), 169–178.

T.Furuta

[1] *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^rA^pB^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$*, Proc. Amer. Math. Soc., **101**(1987), 85–88.

[2] *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci., **65**(1989), 126.

T.Furuta, M.Ito and T.Yamazaki *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes*, Scientiae Mathematicae, **1**(1998), 389–403.

T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida

Order preserving operator function via Furuta inequality "$A \geq B \geq 0$ ensures $(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$ for $p \geq 1$ and $r \geq 0$", Oper. Theory Adv. Appl., **115**(2000), 185–194.

T.Furuta and M.Yanagida

[1] *On powers of p-hyponormal operators*, Scientiae Mathematicae, **2** (1999), 279–284.

[2] *On powers of p-hyponormal and log-hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **5**(2000), 367–380.

M.Ito *Several properties on class A including p-hyponormal and log-hyponormal operators*, Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 569–578.

K.Tanahashi *On log-hyponormal operators*, Integral Equations Operator Theory, **34**(1999), 364–372.

T.Yamazaki *On powers of class A(k) operators including p-hyponormal and log-hyponormal operators*, Math. Inequal. Appl., **3**(2000), 97–104.

§3.5.1～§3.5.6 の結果は [Furuta-Ito-Yamazaki 1998] で示された．これらの結果は §3.2.1 の Theorem L-H, Theorem F, Lemma A の応用として得られたものであることに注意しておく．なお，§3.5.2 の Lemma 1, §3.5.3 の Lemma 1 は [Furuta-Yamazaki-Yanagida 1996] による．また，§3.5.5 の Theorem 2 は [Ando 1972] で示された．

§3.5.7 の Theorem 1 は [Furuta-Yanagida 1999] で示された．また，この結果のさらなる拡張と log-hyponormal 作用素に対する結果は [Furuta-Yanagida 2000] で示されている．

本節の最後に，class A 作用素や class A(k) 作用素の性質に関して興味深い結果を紹介する．

次の paranormal 作用素に対する Theorem A と対応した結果として，[Ito 1999] では class A 作用素に対する Theorem B が示されている．

Theorem A.

(i) T が paranormal 作用素のとき，任意の単位ベクトル $x \in H$ と自然数 n に対して

$$\|T^n x\|^{\frac{1}{n}} \geq \|Tx\|$$

が成り立つ．

(ii) T が paranormal 作用素のとき，任意の自然数 n に対して T^n は paranormal 作用素となる．

(iii) T が可逆な paranormal 作用素のとき，T^{-1} は paranormal 作用素となる．

(iv) T が paranormal 作用素のとき，任意の単位ベクトル $x \in H$ と自然数 n に対して

$$\|Tx\| \leq \|T^2x\|^{\frac{1}{2}} \leq \cdots \leq \|T^nx\|^{\frac{1}{n}}$$

が成り立つ．

Theorem B.

(i) T が可逆な class A 作用素のとき，任意の自然数 n に対して

$$|T^n|^{\frac{2}{n}} \geq |T|^2$$

が成り立つ．

(ii) T が可逆な class A 作用素のとき，任意の自然数 n に対して T^n は class A 作用素である．

(iii) T が可逆な class A 作用素のとき，T^{-1} は class A 作用素である．

(iv) T が可逆な class A 作用素のとき，任意の自然数 n に対して

$$|T|^2 \leq |T^2| \leq \cdots \leq |T^n|^{\frac{2}{n}}$$

が成り立つ．

また，p-hyponormal 作用素に対する §3.5.7 の Corollary 3 と対応した結果として，[Yamazaki 2000] では，class A(k) 作用素のべき乗に関して次の Theorem C が示されている．

Theorem C. ある $k \in (0, 1]$ に対して，T は可逆な class A(k) 作用素とする．このとき，自然数 n に対して T^n は class A($\frac{k}{n}$) 作用素である．

Theorem C において $k = 1$ とすると，T が可逆な class A 作用素のとき T^n は class A($\frac{1}{n}$) 作用素であることがわかる．§3.5.3 の Theorem 1 より，可逆な class A($\frac{1}{n}$) 作用素は class A 作用素なので，Theorem C は Theorem B の (ii) の拡張となっていることがわかる．

§3.6 Kantorovich の不等式と Hölder-McCarthy の不等式に関連した作用素不等式

本章では，Kantorovich の不等式と Hölder-McCarthy の不等式に関連した作用素不等式について議論したい．特に Hölder-McCarthy の不等式の補完的な不等式を示し，その応用としての順序を保存する作用素不等式を示そう．

§3.6.1 Kantorovich の不等式，Hölder-McCarthy の不等式とそれらに関連する拡張

最初に非常に有用な Kantorovich の不等式を次に紹介しよう．

Theorem K (Kantorovich (カントロビッチ) の不等式).
A を $MI \geq A \geq mI > 0$ を満たすヒルベルト空間 H 上の正値作用素とする．すると，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して次の不等式が成り立つ．

(i) $(Ax,x)(A^{-1}x,x) \leq \dfrac{(m+M)^2}{4mM}$.

(ii) $(A^2x,x) \leq \dfrac{(m+M)^2}{4mM}(Ax,x)^2$.

多くの研究者が Kantorovich の不等式について研究をしているが，なかでも Mond-Pečarić の二人による一連の研究論文が有名である (§3.6.1, 3.6.2 に関するメモ・注釈・参考文献を参照).

Proof. (i) $MI \geq A \geq mI > 0$ であることにより，次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} 0 &\leq (MI - A)A^{-1}(A - mI) \\ &= MI - A - mMA^{-1} + mI. \end{aligned}$$

つまり任意の単位ベクトルに対して，

$$\begin{aligned} m + M &\geq (Ax,x) + mM(A^{-1}x,x) \\ &\geq 2\sqrt{mM(Ax,x)(A^{-1}x,x)}. \end{aligned}$$

そして，これを整理することによって (i) を得る．

(ii) (i) において，単位ベクトル x を $\dfrac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}$ とおくことによって，

$$\left(A\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}, \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}\right)\left(A^{-1}\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}, \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

が得られ，これを整理することによって (ii) を得る. □

Remark 1. (a) Theorem K で用いられている定数 $\dfrac{(m+M)^2}{4mM}$ は次のように変形できる. $\dfrac{(m+M)^2}{4mM} = \left(\dfrac{\frac{m+M}{2}}{\sqrt{mM}}\right)^2$. すると括弧の中の分子は m と M の**相加平均**であり，分母は m と M の**相乗平均**と非常に興味深いものとなっている. なお，この定数 $\dfrac{(m+M)^2}{4mM}$ は **Kantorovich** (カントロビッチ) **定数**とよばれている.

(b) じつは，(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) がわかる. (i) $\Longrightarrow$ (ii) は証明の中で示しているが，実際に (ii) において，単位ベクトル x を $\dfrac{A^{\frac{-1}{2}}x}{\|A^{\frac{-1}{2}}x\|}$ とおくだけで (i) が得られる.

(c) 任意の単位ベクトル x に対して $(A^2x,x) \ge (Ax,x)^2$ が成り立つというのは §3.1.2 で紹介した Hölder-McCarthy の不等式であるが，Theorem K の (ii) はまさに Hölder-McCarthy の不等式の補完的な不等式とみなすことができる.

次に，Kantorovich の不等式と Hölder-McCarty の不等式の拡張と関連したいくつかの不等式を紹介しよう.

Theorem 1. A を $MI \ge A \ge mI > 0$ を満たすヒルベルト空間上の正値作用素とする. そして，$f(t)$ を区間 $[m,M]$ 上の下に凸な実数値連続関数とする. このとき，任意の単位ベクトル x に対して，次の不等式 (1) が条件 (i) もしくは (ii) のもとで成り立つ.

(1)

$$(f(A)x,x) \le \frac{(mf(M)-Mf(m))}{(q-1)(M-m)}\left(\frac{(q-1)(f(M)-f(m))}{q(mf(M)-Mf(m))}\right)^q (Ax,x)^q$$

(i) $\quad f(M) > f(m), \quad \dfrac{f(M)}{M} > \dfrac{f(m)}{m},$

$$\frac{f(m)}{m}q \le \frac{f(M)-f(m)}{M-m} \le \frac{f(M)}{M}q$$

が実数 $q > 1$ に対して成り立つ.

(ii) $$f(M) < f(m), \qquad \frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m},$$
$$\frac{f(m)}{m}q \leq \frac{f(M)-f(m)}{M-m} \leq \frac{f(M)}{M}q$$
が実数 $q < 0$ に対して成り立つ．

Corollary 2. A を $MI \geq A \geq mI > 0$ を満たすヒルベルト空間 H 上の正値作用素とする．このとき，任意の単位ベクトル x に対して，次の (2) が条件 (i) もしくは (ii) のもとで成り立つ．

(2) $$(A^p x, x) \leq \frac{(mM^p - Mm^p)}{(q-1)(M-m)}\left(\frac{(q-1)(M^p-m^p)}{q(mM^p-Mm^p)}\right)^q (Ax,x)^q.$$

(i) $m^{p-1}q \leq \dfrac{M^p-m^p}{M-m} \leq M^{p-1}q$ が実数 $p > 1$, $q > 1$ に対して成り立つ．

(ii) $m^{p-1}q \leq \dfrac{M^p-m^p}{M-m} \leq M^{p-1}q$ が実数 $p < 0$, $q < 0$ に対して成り立つ．

Theorem 1 を示すために，次の補題を示そう．

Lemma 1. $h(t)$ を区間 $[m, M]$ $(M > m > 0)$ 上で次の (3) のように定義する．

(3) $$h(t) = \frac{1}{t^q}\left(k + \frac{K-k}{M-m}(t-m)\right).$$

ここで，実数 q は $q \neq 0, 1$，そして K, k もともに実数とする．このとき $[m, M]$ 上での $h(t)$ の最大値は

(4) $$\frac{(mK-Mk)}{(q-1)(M-m)}\left(\frac{(q-1)(K-k)}{q(mK-Mk)}\right)^q$$

である．ただし，(4) における m, M, k, K, q は次の条件 (i) もしくは (ii) を満たすものとする．

(i) $K > k$, $\dfrac{K}{M} > \dfrac{k}{m}$, $\dfrac{k}{m}q \leq \dfrac{K-k}{M-m} \leq \dfrac{K}{M}q$ が実数 $q > 1$ で成り立つ．

(ii) $K < k$, $\dfrac{K}{M} < \dfrac{k}{m}$, $\dfrac{k}{m}q \leq \dfrac{K-k}{M-m} \leq \dfrac{K}{M}q$ が実数 $q < 0$ で成り立つ.

Proof. 微分の計算により，$t_1 = \dfrac{q}{(q-1)}\dfrac{(mK-Mk)}{(K-k)}$ のとき $h'(t_1) = 0$ である．また $t_1 \in [m, M]$ であることより，t_1 が 条件 (i) もしくは (ii) のもとで (4) の $[m, M]$ での最大値を与えていることがわかる． □

Proof of Theorem 1. $f(t)$ が $[m, M]$ 上の実数値連続関数で下に凸であることより，任意の $t \in [m, M]$ に対して次の不等式を得る．

$$f(t) \leq f(m) + \frac{f(M)-f(m)}{M-m}(t-m). \tag{5}$$

ここで，正値作用素 A に対して standard operational calculus を (5) に適用することと，$M \geq (Ax, x) \geq m$ であることより，任意の単位ベクトル x に対して次の不等式

$$(f(A)x, x) \leq f(m) + \frac{f(M)-f(m)}{M-m}((Ax, x) - m) \tag{6}$$

を得る．そして (6) の両辺に $(Ax, x)^{-q}$ をかけることによって，次の式を得る．

$$(Ax, x)^{-q}(f(A)x, x) \leq h(t). \tag{7}$$

ここで，

$$h(t) = (Ax, x)^{-q}\left(f(m) + \frac{f(M)-f(m)}{M-m}((Ax, x) - m)\right)$$

である．すると

$$(f(A)x, x) \leq \left[\max_{m \leq t \leq M} h(t)\right](Ax, x)^q. \tag{8}$$

ここで, Theorem 1 において $K = f(M), k = f(m)$ とおくことによると, Theorem 1 の (i), (ii) はちょうど Lemma 1 の (i), (ii) と等しくなる．よって，(8) と Lemma 1 により Theorem 1 が証明ができた． □

Proof of Corollary 2. Theorem 1 において $f(t) = t^p$ とおく．ただし $p \notin [0, 1]$ とする．$p > 1$ のとき，$f(t)$ が $[m, M]$ 上の実数値連続関数で下に凸となり，$M^p > m^p$, $M^{p-1} > m^{p-1}$. つまり $f(M) > f(m)$, $\dfrac{f(M)}{M} > \dfrac{f(m)}{m}$ が成り立つ．また，$p < 0$ のときも同様に $f(t)$ が $[m, M]$ 上の実数値連続関数で下に凸となり，$M^p < m^p$, $M^{p-1} < m^{p-1}$. つまり $f(M) < f(m)$, $\dfrac{f(M)}{M} < \dfrac{f(m)}{m}$ が成り立つ.

よって，Theorem 1 により Corollary 2 が示された． □

つぎに，Hölder-McCarthy の不等式 や Kantorovich の不等式に関連した次の定理を紹介しよう．

Theorem 3. A を $MI \geq A \geq mI > 0$ を満たすヒルベルト空間 H 上の正値作用素とする．このとき，任意の単位ベクトル x に対して，次が成り立つ．

(i) $p > 1$ のとき: $(Ax,x)^p \leq (A^p x,x) \leq K_+(m,M,p)(Ax,x)^p$.

ここで，$K_+(m,M,p) = \dfrac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \dfrac{(M^p - m^p)^p}{(M-m)(mM^p - Mm^p)^{p-1}}$.

(ii) $p < 0$ のとき: $(Ax,x)^p \leq (A^p x,x) \leq K_-(m,M,p)(Ax,x)^p$.

ここで，$K_-(m,M,p) = \dfrac{(mM^p - Mm^p)}{(p-1)(M-m)} \left(\dfrac{(p-1)(M^p - m^p)}{p(mM^p - Mm^p)} \right)^p$.

Proof. $p \notin [0,1]$ のとき，$f(t) = t^p$ は下に凸な関数であることにより，Corollary 2 において $q = p$ とおけば (i), (ii) の右辺を得る．それぞれの左辺は Hölder-McCarthy の不等式そのものである． □

Corollary 4. A を $MI \geq A \geq mI > 0$ を満たすヒルベルト空間 H 上の正値作用素とする．このとき，任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して次の不等式

(i) $(Ax,x)^p (A^{-1}x,x) \leq \dfrac{p^p}{(p+1)^{p+1}} \dfrac{(m+M)^{p+1}}{mM}$,

(ii) $(A^2 x,x) \leq \dfrac{p^p}{(p+1)^{p+1}} \dfrac{(m+M)^{p+1}}{(mM)^p} (Ax,x)^{p+1}$

が，任意の $\dfrac{m}{M} \leq p \leq \dfrac{M}{m}$ を満たす p に対して成り立つ．

Proof. (i) Corollary 2 の (ii) において $p = -1$ とおき，q を $-p$ と置き換えればよい．

(ii) Corollary 2 の (i) において $p = 2$ とおき，q を $p+1$ に置き換えればよい． □

なお，Corollary 4 において，$p = 1$ のときは Kantorovich の不等式になる．任意の実数 $0 \leq \alpha \leq 1$ と作用素 $A, B > 0$ に対して，A と B の **α-power**

mean $A\sharp_\alpha B$ は，次のように定義される．

$$A\sharp_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}.$$

なお，$A\sharp_\alpha B$ の定義は $A, B \geq 0$ にまで拡張できることが知られている．

そして，$A\sharp_\alpha B$ を用いることによって，Hölder-McCarthy の不等式の補完的なものである次の不等式を示すことができる．

Theorem 5. A と B を

$$M_1 I \geq A \geq m_1 I > 0, \qquad M_2 I \geq B \geq m_2 I > 0$$

を満たすヒルベルト空間 H 上の正値作用素とする．そして実数 p, q を $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすものとする．このとき任意の単位ベクトル x と実数 r, s に対して，次の不等式が成り立つ．

(i) $p > 1$, $q > 1$, $r \geq 0$, $s \geq 0$ のとき:

(9) $$(B^r \sharp_{\frac{1}{p}} A^s x, x) \leq (A^s x, x)^{\frac{1}{p}} (B^r x, x)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq K_+\left(\frac{m_1^{\frac{s}{p}}}{M_2^{\frac{r}{p}}},\ \frac{M_1^{\frac{s}{p}}}{m_2^{\frac{r}{p}}},\ p\right)^{\frac{1}{p}} (B^r \sharp_{\frac{1}{p}} A^s x, x).$$

(ii) $p < 0$, $1 > q > 0$, $r \geq 0$, $s \leq 0$ のとき:

(10) $$(B^r \sharp_{\frac{1}{p}} A^s x, x) \geq (A^s x, x)^{\frac{1}{p}} (B^r x, x)^{\frac{1}{q}}$$
$$\geq K_-\left(\frac{m_1^{\frac{s}{p}}}{m_2^{\frac{r}{p}}},\ \frac{M_1^{\frac{s}{p}}}{M_2^{\frac{r}{p}}},\ p\right)^{\frac{1}{p}} (B^r \sharp_{\frac{1}{p}} A^s x, x).$$

ここで，$K_+(m, M, p)$, $K_-(m, M, p)$ は Theorem 3 で定義されたものである．

特に次が成り立つ．

(i)′ $p > 1$, $q > 1$ のとき:

(11) $$(B^q \sharp_{\frac{1}{p}} A^p x, x) \leq (A^p x, x)^{\frac{1}{p}} (B^q x, x)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq K_+\left(\frac{m_1}{M_2^{q-1}},\ \frac{M_1}{m_2^{q-1}},\ p\right)^{\frac{1}{p}} (B^q \sharp_{\frac{1}{p}} A^p x, x).$$

(ii)′ $p<0,\ 1>q>0$ のとき:

(12) $$(B^q\sharp_{\frac{1}{p}}A^px,x)\geq (A^px,x)^{\frac{1}{p}}(B^qx,x)^{\frac{1}{q}} \geq K_-\left(\frac{m_1}{m_2^{q-1}},\ \frac{M_1}{M_2^{q-1}},\ p\right)^{\frac{1}{p}}(B^q\sharp_{\frac{1}{p}}A^px,x).$$

Proof. (i) $p>1,\ q>1,\ r\geq 0,\ s\geq 0$ のとき．Theorem 3 から

(13) $$(Ax,x)\leq (A^px,x)^{\frac{1}{p}}(x,x)^{\frac{1}{q}}\leq K_+(m,M,p)^{\frac{1}{p}}(Ax,x)$$

が任意のベクトル x で成り立つことがわかる．そして，$r\geq 0,\ s\geq 0$ であることより，

$$M_2^{-r}m_1^sI\leq m_1^sB^{-r}\leq B^{\frac{-r}{2}}A^sB^{\frac{-r}{2}}\leq M_1^sB^{-r}\leq M_1^sm_2^{-r}I.$$

つまり任意の $p>1$ に対して，

$$M_2^{\frac{-r}{p}}m_1^{\frac{s}{p}}I\leq (B^{\frac{-r}{2}}A^sB^{\frac{-r}{2}})^{\frac{1}{p}}\leq M_1^{\frac{s}{p}}m_2^{\frac{-r}{p}}I.$$

ここで, (13) において A を $(B^{\frac{-r}{2}}A^sB^{\frac{-r}{2}})^{\frac{1}{p}}$ に, x を $B^{\frac{r}{2}}x$ に置き換えることによって,

$$(B^r\sharp_{\frac{1}{p}}A^sx,x)\leq (A^sx,x)^{\frac{1}{p}}(B^rx,x)^{\frac{1}{q}} \leq K_+\left(\frac{m_1^{\frac{s}{p}}}{M_2^{\frac{r}{p}}},\ \frac{M_1^{\frac{s}{p}}}{m_2^{\frac{r}{p}}},\ p\right)^{\frac{1}{p}}(B^r\sharp_{\frac{1}{p}}A^sx,x)$$

を得る．

(ii) $p<0,\ 1>q>0,\ r\geq 0,\ s\leq 0$ のとき．Theorem 3 より

(14) $$(Ax,x)\geq (A^px,x)^{\frac{1}{p}}(x,x)^{\frac{1}{q}}\geq K_-(m,M,p)^{\frac{1}{p}}(Ax,x)$$

が任意のベクトル x で成り立つことがわかる．そして，$p<0,\ s\leq 0$ であることより，

$$M_2^{-r}M_1^sI\leq M_1^sB^{-r}\leq B^{\frac{-r}{2}}A^sB^{\frac{-r}{2}}\leq m_1^sB^{-r}\leq m_1^sm_2^{-r}I.$$

つまり，任意の $p<0$ に対して

$$M_2^{\frac{-r}{p}}M_1^{\frac{s}{p}}I\geq (B^{\frac{-r}{2}}A^sB^{\frac{-r}{2}})^{\frac{1}{p}}\geq m_1^{\frac{s}{p}}m_2^{\frac{-r}{p}}I.$$

ここで，(14) において，A を $(B^{\frac{-r}{2}}A^sB^{\frac{-r}{2}})^{\frac{1}{p}}$, x を $B^{\frac{r}{2}}x$ と置き換えると,

$$(B^r\sharp_{\frac{1}{p}}A^sx,x)\geq (A^sx,x)^{\frac{1}{p}}(B^rx,x)^{\frac{1}{q}} \geq K_-\left(\frac{m_1^{\frac{s}{p}}}{m_2^{\frac{r}{p}}},\ \frac{M_1^{\frac{s}{p}}}{M_2^{\frac{r}{p}}},\ p\right)^{\frac{1}{p}}(B^r\sharp_{\frac{1}{p}}A^sx,x).$$

(11), (12) は (9), (10) において，それぞれ $s=p,\ r=q$ とおけばよい．

よって Theorem 5 が示された． □

§3.6.2 §3.6.1 の Theorem 3 の順序を保存するべき乗に関する不等式への応用

任意の $p \in [0,1]$ に対して，$A \geq B > 0$ ならば $A^p \geq B^p$ というのは有名な Löwner-Heinz の不等式であるが，任意の $p > 1$ に対しては $A \geq B > 0$ ならば $A^p \geq B^p > 0$ となるとは限らないということも，またよく知られている．これに関して次の結果を示そう．

Theorem 1. A, B を $M_1 I \geq A \geq m_1 I > 0$, $M_2 I \geq B \geq m_2 I > 0$ かつ $A \geq B > 0$ を満たすヒルベルト空間 H 上の正値作用素とする．このとき，次の 2 つの不等式が任意の $p \geq 1$ で成り立つ．

(1-A) $$\left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{p-1} A^p \geq K_+(m_2, M_2, p) A^p \geq B^p,$$

(2-B) $$\left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{p-1} A^p \geq K_+(m_1, M_1, p) A^p \geq B^p.$$

ここで，$K_+(m, M, p)$ は §3.6.1 の Theorem 3 で定義されたものである．

Remark 1. Theorem 1 の $K(m, M, p)$ はちょうど以下にあげる $K_1(h, p)$ と一致する．

(1) $$K_1(h,p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \frac{(h^p-1)^p}{(h-1)(h^p-h)^{p-1}},$$

ただし，$h = \dfrac{M}{m} > 1$ とする．

Theorem 1 を示すために，次の Proposition 1 を用意する．

Proposition 1. $h \geq 1$ ならば，

(2) $$K_1(h,p) = \frac{(p-1)^{p-1}(h^p-1)^p}{p^p(h-1)(h^p-x)^{p-1}} \leq h^{p-1}$$

が $1 < p < \infty$ で成り立つ．そして等号条件は $h \downarrow 1$ である．

Proposition 1 を示すために，次の 3 つの補題を用意しよう．

Lemma 1. 実数 p を $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする．このとき $t \geq 1$ ならば,

$$0 \leq (p-1)t - pt^{\frac{1}{q}} + 1 \tag{3}$$

が成り立つ．そして等号条件は $t = 1$ である．

Proof. $f(t) = (p-1)t - pt^{\frac{1}{q}} + 1$ とする．すると $f(1) = 0$ であり,

$$f'(t) = (p-1)(1 - t^{\frac{-1}{p}}) \geq 0$$

が $t \geq 1, 1 < p < \infty$ で成り立つ．よって (3) を得た． □

Lemma 2. $1 < p < \infty$ とする．このとき $t \geq 1$ ならば,

$$\frac{t^{\frac{1}{p}}}{t} \frac{(t-1)}{(t^{\frac{1}{p}} - 1)} \leq p \tag{4}$$

が成り立ち，等号条件は $t \downarrow 1$ である．

Proof. (3) の両辺に $t^{\frac{1}{p}}$ をかけることによって,

$$0 \leq (p-1)tt^{\frac{1}{p}} - pt + t^{\frac{1}{p}}, \quad \text{すなわち} \quad (t-1)t^{\frac{1}{p}} \leq pt(t^{\frac{1}{p}} - 1).$$

よって (4) を得る． □

Lemma 3. $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする．このとき $t \geq 1$ ならば

$$\frac{t-1}{(t^{\frac{1}{p}} - 1)^{\frac{1}{p}} (t^{\frac{1}{q}} - 1)^{\frac{1}{q}} t^{\frac{2}{pq}}} \leq p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} \tag{5}$$

が成り立つ．そして等号条件は $t \downarrow 1$ である．

Proof. (4) の両辺をそれぞれ $\frac{1}{p}$ 乗，$\frac{1}{q}$ 乗することによって次を得る．

$$\left(\frac{t^{\frac{1}{p}}(t-1)}{t(t^{\frac{1}{p}} - 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \leq p^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

$$\left(\frac{t^{\frac{1}{q}}(t-1)}{t(t^{\frac{1}{q}} - 1)} \right)^{\frac{1}{q}} \leq p^{\frac{1}{q}}. \tag{7}$$

そして (6) と (7) をかけ合わせることによって (5) を得る. □

Proof of Proposition 1. (5) の右辺を整理すると, $t \geq 1$ に対して

$$\frac{t-1}{(t^{\frac{1}{p}}-1)^{\frac{1}{p}}(t^{\frac{1}{q}}-1)^{\frac{1}{q}}t^{\frac{2}{pq}}} \leq \frac{p}{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

そして, 上の不等式の両辺を p 乗することによって, 次を得る.

$$\frac{(t-1)^p}{(t^{\frac{1}{p}}-1)(t^{\frac{1}{q}}-1)^{\frac{p}{q}}t^{\frac{2}{q}}} \leq \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}.$$

ここで $t = h^p$ とおくことによって, 任意の $1 < p < \infty$, $h \geq 1$ に対して次の (8) を得る.

$$\text{(8)} \qquad \frac{(h^p-1)^p}{(h^{p-1}-1)^{p-1}(h-1)h^{2p-2}} \leq \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}.$$

なお等号条件は $h \downarrow 1$ である. よって Proposition 1 が示された. □

Proof of Theorem 1. $p = 1$ の場合は明らかなので, $p > 1$ の場合のみを示せばよい. 最初に $M \geq m > 0$ であることにより, Proposition 1 において $h = \dfrac{M}{m} \geq 1$ とおいた次の式が $p > 1$ で成り立つ.

$$\text{(9)} \qquad K_+(m, M, p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\frac{(M^p-m^p)^p}{(M-m)(mM^p-Mm^p)^{p-1}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{p-1}.$$

よって, 任意の $p > 1$ に対して,

$$\begin{aligned}
(B^p x, x) &\leq K_+(m_2, M_2, p)(Bx, x)^p && \text{(§3.6.1 の Theorem 3 (i) より)}\\
&\leq K_+(m_2, M_2, p)(Ax, x)^p && (A \geq B > 0 \text{ より})\\
&\leq K_+(m_2, M_2, p)(A^p x, x)\\
&\leq \left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{p-1}(A^p x, x).
\end{aligned}$$

なお, 3 番目の不等式は Hölder-MaCarty の不等式により, 最後の不等式は (9) によるものである. よって (1-A) を得た.

次に, $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$, $M_1^{-1}I \leq A^{-1} \leq m_1^{-1}I$ であることより, (1-A) を用いて

$$\begin{aligned}
A^{-p} &\leq K_+(M_1^{-1}, m_1^{-1}, p)B^{-p}\\
&= \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p(m_1^{-1}-M_1^{-1})}\frac{(m_1^{-p}-M_1^{-p})^p}{(M_1^{-1}m_1^{-p}-m_1^{-1}M_1^{-p})^{p-1}}B^{-p}\\
&= \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p(M_1-m_1)}\frac{(M_1^p-m_1^p)^p}{(m_1M_1^p-M_1m_1^p)^{p-1}}B^{-p}
\end{aligned}$$

$$= K_+(m_1, M_1, p)B^{-p}$$
$$\leq \left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{p-1} B^{-p}$$

を得る．よって両辺の逆をとれば (2-B) を得る．

ゆえに Theorem 1 が証明できた．□

Theorem 1 によって，次の結果が示すことができる．

Theorem 2. $A \geq B > 0$, $MI \geq B \geq mI > 0$ とすると，

$$B^p \leq \left(\frac{M}{m}\right)^p A^p$$

が $p \geq 1$ で成り立つ．

Remark 1. $j = 1, 2$ に対して

$$K_+(m_j, M_j, p) \leq \left(\frac{M_j}{m_j}\right)^{p-1} \leq \left(\frac{M_j}{m_j}\right)^p$$

が $p \geq 1$ で成り立つことにより，Theorem 1 の (1-A), (2-B) はともに Theorem 2 よりも精密な評価になっている．

§3.6.1, 3.6.2 に関するメモ・注釈・参考文献

K.Fan *Some matrix inequalities,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **29** (1966), 185–196.

M.Fujii, S.Izumino, R.Nakamoto and Y.Seo *Operator inequalities related to Cauchy-Schwarz and Hölder-McCarthy inequalities,* Nihonkai Math. J., **8**(1997), 117–122.

T.Furuta *Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities,* J. Inequal. Appl., **2**(1998), 137–148.

F.Kubo and T.Ando *Means of positive linear operators,* Math. Ann., **246** (1980), 883–886.

B.Mond and J.E.Pečarić

[1] *Convex inequalities in Hilbert spaces,* Houston J. Math., **19**(1993), 405–420.

[2] *A matrix version of the Ky Fan generalization of the Kantorovich inequality,* Linear and Multilinear Algebra, **36**(1994), 217–221.

Kantorovich の不等式に関しては非常に多くの論文が知られているが, ここでは, Mond-Pečarić による一連の研究論文より, [Mond-Pečarić 1993], [Mond-Pečarić 1994] を引用した.

§3.6.1 の Theorem 1, Corollary 2 は [Furuta 1998] によって, Corollary 2 の $q = p$ かつ整数 $p \neq 0, 1$ の場合は [Ky Fan 1966] で示されている.

§3.6.1 の Theorem 5 の (11) は [M.Fujii-Izumino-Nakamoto-Seo 1997] によって, §3.6.2 の Theorem 1 は [Furuta 1998] によって示されている. α-power mean $A\sharp_\alpha B$ は [Kubo-Ando 1980] で定義されている.

§3.6.3 一般化 Furuta 不等式の Kantorovich type の不等式への応用

本項では, §3.2.1 の Theorem G の応用として, **operator equation** (作用素方程式) を用いた chaotic order の特徴づけを示そう.

Theorem 1. A, B を可逆な正値作用素とする. このとき, 次の命題 (I)~(IV) は互いに同値である.

(I) $A \gg B$ (つまり, $\log A \geq \log B$).

(II) 任意の $\alpha \in [0,1]$, $p \geq 0$, $u \geq 0$ に対して,

$$(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}})^s = TA^{(p+\alpha u)s}T$$

が $s \geq 1$, $(p+\alpha u)s \geq (1-\alpha)u$ で成り立つような $\|T\| \leq 1$ である可逆な正値作用素 T が一意に存在する.

(III) 任意の $\alpha \in [0,1]$, $p \geq u \geq 0$ に対して,

$$(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}})^s = TA^{(p+\alpha u)s}T$$

が $s \geq 1$ で成り立つような $\|T\| \leq 1$ である可逆な正値作用素 T が一意に存在する.

(IV) 任意の $p \geq 0$ に対して,

$$B^p = TA^pT$$

が成り立つような $\|T\| \leq 1$ である可逆な正値作用素 T が一意に存在する.

Theorem 1 の応用として，次にあげる Kantorovich type の chaotic order の特徴づけを得る．

Theorem 2. A, B を $MI \geq A \geq mI > 0$ を満たす可逆な正値作用素とする．このとき次の命題 (I)～(IV) は互いに同値である．

(I) $A \gg B$ (つまり，$\log A \geq \log B$).

(II) 任意の $\alpha \in [0,1]$, $p \geq 0$, $u \geq 0$ に対して，

$$\frac{(M^{(p+\alpha u)s} + m^{(p+\alpha u)s})^2}{4M^{(p+\alpha u)s}m^{(p+\alpha u)s}} A^{(p+\alpha u)s} \geq (A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}})^s$$

が任意の $s \geq 1$, $(p+\alpha u)s \geq (1-\alpha)u$ に対して成り立つ．

(III) 任意の $\alpha \in [0,1]$, $p \geq u \geq 0$ に対して，

$$\frac{(M^{(p+\alpha u)s} + m^{(p+\alpha u)s})^2}{4M^{(p+\alpha u)s}m^{(p+\alpha u)s}} A^{(p+\alpha u)s} \geq (A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}})^s$$

が任意の $s \geq 1$ で成り立つ．

(IV) $\dfrac{(M^p + m^p)^2}{4M^p m^p} A^p \geq B^p$ がすべての $p \geq 0$ で成り立つ．

これらの定理を示すために，次の 2 つの補題を用意する．

Lemma 1. T を nonsingular な正値作用素とする．もし，ある $X \geq 0$, $Y \geq 0$ 対して $XTX = YTY$ が成り立つならば，$X = Y$ である．ここで T が nonsingular であるとは，T が単射であり，かつ稠密な値域をもつことをいう．

Proof. もし，ある $X \geq 0$, $Y \geq 0$ に対して $XTX = YTY$ が成り立つならば，$(T^{\frac{1}{2}}XT^{\frac{1}{2}})^2 = (T^{\frac{1}{2}}YT^{\frac{1}{2}})^2$ も成り立つ．よって T が nonsingular であることより $X = Y$ が成り立つ． □

Lemma 2. A を $MI \geq A \geq mI > 0$ を満たすような正値作用素とし，B を $\|T\| \leq 1$ である可逆な正値作用素とする．このとき，

$$\frac{(M+m)^2}{4mM} A \geq BAB$$

が成り立つ．

Proof. Kantorovich の不等式により，任意のベクトル $x \in H$ に対して，

$$(ABx, Bx)(A^{-1}Bx, Bx) \leq K\|Bx\|^4$$

が成り立つ．ただし $K = \dfrac{(M+m)^2}{4Mm}$ とする．よって，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}(ABx, Bx)(A^{-1}Bx, Bx) &\leq K(B^2x, x)^2 \\ &\leq K(Bx, x)^2 \qquad (I \geq B \geq 0 \text{ より}) \\ &= K(A^{-\frac{1}{2}}Bx, A^{\frac{1}{2}}x)^2 \\ &\leq K(A^{-1}Bx, Bx)(Ax, x).\end{aligned}$$

よって証明ができた． □

Remark 1. Lemma 2 において，次の予想 (∗) が $\dfrac{(M+m)^2}{4mM}A \geq BAB$ の代わりに成り立つと思うであろう．

(∗) $A \geq BAB$ が任意の正値作用素 A と $\|T\| \leq 1$ である可逆な正値作用素 B に対して成り立つ．

しかし，この予想が成り立たないような反例を次のようにあげることができる．A, B を次のようにとる．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

すると，$A \geq 0$ かつ $I \geq B \geq 0$ であるが，

$$A - BAB = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \not\geq 0.$$

Remark 1 は Theorem 2 の (II), (III), (IV) に密接に関連している．

Proposition 1. A, B を可逆な正値作用素とする．このとき次の命題 (I) ～(III) は互いに同値である．

(I) $A \gg B$ 　(つまり，$\log A \geq \log B$).

(II) $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}}B^pA^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}}$ がすべての $p \geq 0$ で成り立つ．

(III) $A^u \geq (A^{\frac{u}{2}}B^pA^{\frac{u}{2}})^{\frac{u}{p+u}}$ がすべての $p \geq 0$, $u \geq 0$ で成り立つ．

(I) $\Longleftrightarrow$ (II) は [Ando 1987] によって示されている．(I) $\Longleftrightarrow$ (III) は §3.2.3 の Theorem 2 で示されている．ここでは簡単のため，次にあげる簡潔な証明を紹介しよう．

Proposition 1 の (II) $\Longrightarrow$ (I) の簡潔な証明. (II) より，

$$\frac{A^p - I}{p} \geq \frac{(A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}} - I}{p}$$
$$= \left[\frac{A^{\frac{p}{2}}(B^p - I)A^{\frac{p}{2}}}{p} + \frac{A^p - I}{p} \right] \{(A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}} + I\}^{-1}.$$

そして $p \downarrow 0$ とすれば

$$\log A \geq \frac{1}{2}(\log B + \log A)$$

を得る．つまり $\log A \geq \log B$ である． □

Proof of Theorem 1. (I) $\Longrightarrow$ (II). 最初に，§3.2.3 の Theorem 2 によって次の (1) を得る．

(1) $A \gg B \iff A^u \geq (A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}})^{\frac{u}{p+u}}$ がすべての $p \geq 0$, $u \geq 0$ で成り立つ.

ここで (1) において $A_1 = A^u$, $B_1 = (A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}})^{\frac{u}{p+u}}$ とおくと，(1) より $A_1 \geq B_1 \geq 0$ である．すると §3.2.1 の Theorem G によって，任意の $t \in [0,1]$, $p \geq 0$, $u \geq 0$ に対して，

(2) $$A_1^{\frac{(p_1-t)s+r}{q}} \geq \{A_1^{\frac{r}{2}}(A_1^{\frac{-t}{2}} B_1^{p_1} A_1^{\frac{-t}{2}})^s A_1^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1}{q}}$$

が $s \geq 1, p_1 \geq 1, q \geq 1$ と次にあげる 2 つの条件式 (3), (4) のもとで成り立つ.

(3) $$r \geq t,$$

(4) $$(1 - t + r)q \geq (p_1 - t)s + r.$$

ここで $u > 0$ の場合，(3), (4) に $p_1 = \dfrac{p+u}{u} \geq 1$, $q = 2$, $r = (p_1 - t)s$, $\alpha = 1 - t$ とおく．すると $\alpha \in [0,1]$ より，(4) は満たされる．よって，(3) のみが必要な条件であり，次の式と同値になる．

(5) $$(p + \alpha u)s \geq (1 - \alpha)u.$$

これによって，(2) より任意の $\alpha \in [0,1]$, $p \geq 0$, $u \geq 0$ に対して

(6) $$I \geq A^{\frac{-(p+\alpha u)s}{2}} \{A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} (A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}})^s A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}\}^{\frac{1}{2}} A^{\frac{-(p+\alpha u)s}{2}}$$

が $s \geq 1$ と条件式 (5) のもとで成り立つ.

ここで, T を (6) の右辺と定義する．すると (6) より T は可逆な positive contraction

となることがわかり，次が成り立つ．

$$(7) \qquad A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}TA^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} = \{A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}(A^{\frac{\alpha u}{2}}B^pA^{\frac{\alpha u}{2}})^sA^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}\}^{\frac{1}{2}}.$$

そして，(7) の両辺を 2 乗すると，

$$A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}TA^{(p+\alpha u)s}TA^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} = A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}(A^{\frac{\alpha u}{2}}B^pA^{\frac{\alpha u}{2}})^sA^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}},$$

つまり $u>0$ の場合は，次の

$$(8) \qquad TA^{(p+\alpha u)s}T = (A^{\frac{\alpha u}{2}}B^pA^{\frac{\alpha u}{2}})^s$$

が $s \geq 1$, $(p+\alpha u)s \geq (1-\alpha)u$ で成り立つということがわかる．次に，(8) において $u=0$ の場合を確認しよう．実際，Proposition 1 の (II) によって，(I) より $I \geq T = A^{\frac{-p}{2}}(A^{\frac{p}{2}}B^pA^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{-p}{2}}$ がすべての $p \geq 0$ で成り立つということが得られる．これより，$TA^pT = B^p$ がすべての $p \geq 0$ で成り立つということがわかるが，これは (8) においてちょうど $u=0$ とおいたものになっている．また，(8) における T の一意性は Lemma 1 よりわかる．

(II) $\Longrightarrow$ (III). (II) において $p \geq u \geq 0$ とおく．すると条件 $(p+\alpha u)s \geq (1-\alpha)u$ を満たし，(III) が得られる．

(III) $\Longrightarrow$ (IV). (III) において，$u=0$, $s=1$ とおく．

(IV) $\Longrightarrow$ (I). (IV) が成り立つと仮定する．すると (IV) より次が得られる．

$$(A^{\frac{p}{2}}TA^{\frac{p}{2}})^2 = A^{\frac{p}{2}}TA^pTA^{\frac{p}{2}} = A^{\frac{p}{2}}B^pA^{\frac{p}{2}}.$$

ここで，§3.2.1 の Theorem L-H によって，両辺 $\frac{1}{2}$ 乗すると，$I \geq T > 0$ であることにより，

$$(9) \qquad A^p \geq A^{\frac{p}{2}}TA^{\frac{p}{2}} \geq (A^{\frac{p}{2}}B^pA^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ．よって Proposition 1 により (I) が得られる．

ゆえに Theorem 1 が示せた． □

Proof of Theorem 2. (I) $\Longrightarrow$ (II). $MI \geq A \geq mI > 0$ という仮定と α, p, u, s の条件により，

$$M^{(p+\alpha u)s}I \geq A^{(p+\alpha u)s} \geq m^{(p+\alpha u)s}I > 0$$

が成り立つ．よって Theorem 1 の (II) と Lemma 2 によって，(II) が得られる．

(II) $\Longrightarrow$ (III). (II) において，$p \geq u \geq 0$ とおく．すると条件 $(p+\alpha u)s \geq (1-\alpha)u$ を満たし，(III) が得られる．

(III) $\Longrightarrow$ (IV). (III) において，$u=0$, $s=1$ とおけばよい．

(IV) $\Longrightarrow$ (I). これについては §3.6.4 の Theorem 2 で示す．

よって Theorem 2 の証明ができた． □

§3.6.4 $\log A \geq \log B$ という条件の Kantorovich type の不等式は $A \geq B \geq 0$ という条件の Kantorovich type の不等式により示される

Theorem 1 (Kantorovich type の不等式 I). 2つの作用素 A, B を $A > 0$, $MI \geq B \geq mI > 0$ 満たすものとする．このとき次の2つの parallelism (平行性) が成り立ち，(ii) は (i) より直接に導かれる．

(i) $A \geq B$ ならば

$$K_+(m, M, p)A^p \geq B^p$$

が任意の $p \geq 1$ で成り立つ．

(ii) $\log A \geq \log B$ ならば

$$M_h(p)A^p \geq B^p$$

が任意の $p > 0$ で成り立つ．

ここで，$K(m, M, p)$ は §3.6.1 の Theorem 3 で定義されたものであり，$M_h(p)$ は以下に定義するものである．

$$h = \frac{M}{m} > 1 \text{ に対して } M_h(p) = \frac{h^{\frac{p}{h^p-1}}}{e \log h^{\frac{p}{h^p-1}}}.$$

Theorem 1 を示すために，次の Proposition 1 を用意しておく．

Proposition 1. $K_+(m, M, p)$ を §3.6.1 の Theorem 3 で，$K_1(h, p)$ を §3.6.2 の Proposition 1 でそれぞれ定義したものとし，$h = \dfrac{M}{m} > 1$, 任意の自然数 n に対して $h_n = \dfrac{1 + \frac{1}{n}\log M}{1 + \frac{1}{n}\log m}$ とする．このとき次の (3), (4) が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{h_n^{np} - 1}{h_n^{np} - h_n}\right)^n = h^{\frac{1}{h^p-1}}. \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} K_+\left(1 + \frac{1}{n}\log m, 1 + \frac{1}{n}\log M, np\right) = \lim_{n\to\infty} K_1(h_n, np) = M_h(p). \tag{4}$$

Theorem 1 の証明のためにもう一度，明らかであるが，重要な公式 ($\star\star$) をあげておこう．

($\star\star$) 任意の $X > 0$ に対して， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{1}{n}\log X\right)^n = X.$

Proof of Proposition 1. **(3) の証明.** $f(n) = \left(\dfrac{h_n^{np} - 1}{h_n^{np} - h_n}\right)^n$ とする．このとき $n \to \infty$ とすると，($\star\star$) によって $h_n^n = \dfrac{(1+\frac{1}{n}\log M)^n}{(1+\frac{1}{n}\log m)^n} \longrightarrow \dfrac{M}{m} = h$ となることにより，$h_n \to 1$, $h_n^n \to h$ を得る．よって $\log f(n) = n\log\left(\dfrac{h_n^{np}-1}{h_n^{np}-h_n}\right)$ は $n \to \infty$ としたとき $\dfrac{0}{0}$ の形になる．そこで，L'Hospital (ロピタル) の定理を使うと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}\left(\log\frac{h_n^{np}-1}{h_n^{np}-h_n}\right)}{\frac{d}{dn}(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2[(h_n^{np})'(1-h_n)+(h_n)'(h_n^{np}-1)]}{-(h_n^{np}-1)(h_n^{np}-h_n)}$$

$$= \frac{-1}{(h^p-1)^2}\lim_{n\to\infty}h_n^{np}\left[p\log h_n^n + \frac{n^2 p\log h^{-1}}{(n+\log M)(n+\log m)}\right]\frac{n\log h^{-1}}{n+\log m}$$

$$+ \frac{-1}{(h^p-1)^2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\log h^{-1}(h_n^{np}-1)}{(n+\log m)^2}$$

$$= \frac{-1}{(h^p-1)^2}h^p(p\log h - p\log h)\log h^{-1} + \frac{-1}{(h^p-1)^2}(h^p-1)\log h^{-1}$$

$$= \log h^{\frac{1}{h^p-1}}.$$

よって (3) が示された．

(4) の証明.

$$\lim_{n\to\infty}K_+\left(1+\frac{1}{n}\log m, 1+\frac{1}{n}\log M, np\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}K_1(h_n, np) \qquad (\text{§3.6.1 の Remark 1 より})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(np-1)^{np-1}}{(np)^{np}(h_n-1)}\frac{(h_n^{np}-1)^{np}}{(h_n^{np}-h_n)^{np-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n}(\frac{-1}{p}))^{np}}{(np-1)(h_n-1)}\left[(h_n^{np}-h_n)\left(\frac{h_n^{np}-1}{h_n^{np}-h_n}\right)^{np}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n}(\frac{-1}{p}))^{np}(1+\frac{1}{n}\log m)}{(np-1)\frac{1}{n}\log\frac{M}{m}}\left[(h_n^{np}-h_n)\left(\frac{h_n^{np}-1}{h_n^{np}-h_n}\right)^{np}\right]$$

$$= \frac{1}{pe\log h}(h^p-1)h^{\frac{p}{h^p-1}} \qquad ((\star\star), (4) より)$$

$$= \frac{h^{\frac{p}{h^p-1}}}{e\log h^{\frac{p}{h^p-1}}}$$

$$= M_h(p).$$

よって (4) が示された. □

Proof of Theorem 1. (i) は §3.6.2 の Theorem 1 で示されている. よって (i) $\Longrightarrow$ (ii) が直接導けることを示せばよい.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). 十分大きな自然数 n に対して,

$$I+\frac{1}{n}\log A \geq I+\frac{1}{n}\log B > 0$$

であることと, 任意の自然数 n に対して

$$\left(1+\frac{1}{n}\log M\right)I \geq I+\frac{1}{n}\log B \geq \left(1+\frac{1}{n}\log m\right)$$

であることにより, (i) の m, M, p をそれぞれ $1+\frac{1}{n}\log m$, $1+\frac{1}{n}\log M$, np とおくと, 次の式

$$K\left(1+\frac{1}{n}\log m, 1+\frac{1}{n}\log M, np\right)\left(I+\frac{1}{n}\log A\right)^{np} \geq \left(I+\frac{1}{n}\log B\right)^{np}$$

が $np \geq 1$ で成り立つ. よって Proposition 1 の (4) と $(\star\star)$ によって, 次の求める式

$$M_h(p)A^p \geq B^p$$

を得る. よって (i) $\Longrightarrow$ (ii) が示された. □

Theorem 2 (Kantorovich type の不等式 II).

$A > 0$, $MI \geq B \geq mI > 0$ とする. このとき, 次の parallelism が成り立ち, (ii) は (i) より直接導かれる.

(i) $A \geq B$ ならば

$$\frac{(M^{p-1}+m^{p-1})^2}{4m^{p-1}M^{p-1}}A^p \geq B^p$$

がすべての $p \geq 2$ で成り立つ.

(ii) $\log A \geq \log B$ ならば

$$\frac{(M^p+m^p)^2}{4m^pM^p}A^p \geq B^p$$

がすべての $p \geq 0$ で成り立つ.

Simplified proof of (i) of Theorem 2. §3.2.1 の Theorem F の (i) によって，$A \geq B \geq 0$ より

$$A_1 = (B^{\frac{p-2}{2}}A^pB^{\frac{p-2}{2}})^{\frac{1}{2}} \geq B^{p-1} = B_1$$

がすべての $p \geq 2$ で成り立つ．ここで，Theorem 1 の (i) を適用すると，$A_1 \geq B_1$, $M^{p-1}I \geq B_1 \geq m^{p-1}I > 0$ であることより，

$$K(m^{p-1}, M^{p-1}, 2)A_1^2 \geq B_1^2$$

が成り立つ．つまり，

$$K(m^{p-1}, M^{p-1}, 2)B^{\frac{p-2}{2}}A^pB^{\frac{p-2}{2}} \geq B^{2p-2}$$

であるから，

$$\frac{(M^{p-1}+m^{p-1})^2}{4m^{p-1}M^{p-1}}A^p \geq B^p$$

がすべての $p \geq 2$ で成り立つ. □

Proof of (i) $\Longrightarrow$ (ii) of Theorem 2. Theorem 2 の (ii) では，$p > 0$ としてもよい．十分大きな自然数 n に対して，

$$I + \frac{1}{n}\log A \geq I + \frac{1}{n}\log B > 0$$

が成り立ち，

$$\left(1+\frac{1}{n}\log M\right)I \geq I + \frac{1}{n}\log B \geq \left(1+\frac{1}{n}\log m\right)I$$

が任意の自然数 n で成り立つことより，Theorem 2 の (i) を適用すると，

$$\frac{\left\{(1+\frac{1}{n}\log M)^{np-1} + (1+\frac{1}{n}\log m)^{np-1}\right\}^2}{4(1+\frac{1}{n}\log m)^{np-1}(1+\frac{1}{n}\log M)^{np-1}}\left(I+\frac{1}{n}\log A\right)^{np} \geq \left(I+\frac{1}{n}\log B\right)^{np}$$

が $np \geq 2$ で成り立つ．ここで，$n \to \infty$ とすると ($\star\star$) より

$$\frac{(M^p+m^p)^2}{4m^pM^p}A^p \geq B^p$$

がすべての $p > 0$ で成り立つ．よって (i) $\Longrightarrow$ (ii) が示された. □

§3.6.3, 3.6.4 に関するメモ・注釈・参考文献

T.Ando *On some operator inequalities*, Math. Ann., **279**(1987), 157–159.

J.I.Fujii, T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida
Simplified proof of characterization of chaotic order via Specht's ratio, Scientiae Mathematicae, **2**(1999), 63–64.

T.Furuta
[1] *Generalizations of Kosaki trace inequalities and related trace inequalities on chaotic order*, Linear Algebra Appl., **235**(1996), 153–161.
[2] *Results under* $\log A \geq \log B$ *can be derived from ones under* $A \geq B \geq 0$ *by Uchiyama's method—associated with Furuta and Kantorovich type operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **3**(2000), 423–436.

T.Furuta and Y.Seo *An application of generalized Furuta inequality to Kantorovich type inequalities,* Scientiae Mathematicae, **2**(1999), 393–399.

S.Izumino and R.Nakamoto *Functional orders of positive operators induced from Mond-Pecaric convex inequalities,* Scientiae Mathematicae, **2**(1999), 195–200.

Y.Seo *A characterization of operator order via grand Furuta inequality,* to appear in J. Inequal. Appl.

T.Yamazaki
[1] *An extension of Specht's theorem via Kantrovich inequality and related results,* Math. Inequal. Appl., **3**(2000), 89–96
[2] *Further characterizations of chaotic order via Specht's ratio,* Math. Inequal. Appl., **3**(2000), 259–268.

T.Yamazaki and M.Yanagida *Characterizations of chaotic order associated with Kantorovich inequality,* Scientiae Mathematicae, **2**(1999), 37–50.

§3.6.3 の結果は [Furuta-Seo 1999] によるが，§3.6.3 の Theorem 1 の証明のアイデアは [Furuta 1996] による．

§3.6.4 の Theorem 1 の (ii) は，[Yamazaki-Yanagida 1999] において長く大変な証明が得られているが，[J.I.Fujii-Furuta-Yamazaki-Yanagida 1999] では簡潔な証明が得られている．§3.6.4 の結果は [Furuta 2000] による．本章では §3.2.3 の Theorem 2 を示した方法と同じやり方で，§3.6.4 の Theorem 1 の (ii) の直接の証明は (i) の単なる応用として示している．

[Izumino-Nakamoto 1999] では，§3.6.4 の Theorem 1 の (i) と (ii) を補間するような関数についての優れた作用素不等式が示されている．

§3.7 partial isometry, quasinormality, paranormality のいくつかの性質

§3.7.1 partial isometry が quasinormal や paranormal になるための条件

次にあげるのは quasinormal partial isometry に関する結果である．

Theorem 1. 作用素 T に関する次の条件は同値である．

(i) T は partial isometry かつ quasinormal である．

(ii) T は isometry とゼロの直和である．

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii). T が partial isometry かつ quasinormal であれば, $T = PT = TP$ が成り立つ．ここで $P = T^*T$ は initial projection とする．これより initial space $N(T)^\perp$ は T を reduce し，T の $N(T)^\perp$ への制限は isometry になることがわかる．よって T は isometry とゼロの直和である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $T = S \oplus 0$ であるとする．ここで S は isometry とする．すると

$$T^*TT = (S^*S \oplus 0)(S \oplus 0) = S \oplus 0 = T = (S \oplus 0)(S^*S \oplus 0) = TT^*T. \qquad \square$$

次に normal partial isometry と subnormal partial isometry についての結果をあげよう．

Theorem 2. T をヒルベルト空間 H 上の作用素とする．このとき，

(i) T が normal partial isometry であることと，T が unitary とゼロとの直和であることは同値である．

(ii) T が subnormal partial isometry であることと，T が isometory とゼロとの直和であることは同値である．

Proof. (i) ($\Longrightarrow$) $T^*T = TT^*$ であることより，$N(T)^\perp$ と $R(T)$ は一致する．よって T の $N(T)^\perp$ への制限は unitary になる．ゆえに $N(T)^\perp \oplus N(T) = H$ であり，$T = \text{unitary} \oplus 0$ が成り立つ．

($\Longleftarrow$) は明らか．

(ii) ($\Longrightarrow$) T が subnormal ならば, §2.6.2 の Theorem 1 によって T は hyponormal となる．つまり $T^*T \geq TT^*$ が成り立つ．よって $N(T)^\perp \supset R(T)$ となり，$N(T)^\perp$

は T の invariant subspace となる．ここから，$N(T)^\perp$ は T を reduce する．明らかに T の $N(T)^\perp$ への制限は isometry であることより，$N(T)^\perp \oplus N(T) = H$ であり，$T = \text{isometry} \oplus 0$ が成り立つ．

($\Longleftarrow$) §2.6.2 の Theorem 1 により，quasinormal は subnormal であることより，Theorem 1 を適用することによって証明ができる． □

> **Theorem 3.** T が partial isometry かつ paranormal ならば，T は quasinormal になる．すなわち，T は isometry とゼロの直和である．

Proof. T が paranormal より

$$\|x\|\,\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$$

が任意の x で成り立つ．そこで，x を T^*Tx とおくと，次の不等式を得る．

$$(1) \qquad \|T^*Tx\|\,\|T^2T^*Tx\| \geq \|TT^*Tx\|^2.$$

$T = TT^*T$ より $T^*T = (T^*T)^2$ が成り立ち，そこから

$$\|T^*Tx\|^2 = ((T^*T)^2x, x) = (T^*Tx, x) = \|Tx\|^2,$$

つまり

$$(2) \qquad \|T^*Tx\| = \|Tx\|.$$

そして (1), (2) と $T = TT^*T$ によって，

$$\|Tx\|\,\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2.$$

これと $\|T\| \leq 1$ であるということから，次の (3) を得る．

$$(3) \qquad \|T^2x\| = \|Tx\|.$$

よって，

$$\begin{aligned}\|T^*T^2x - Tx\|^2 &= (T^*T^2x, T^*T^2x) - (T^*T^2x, Tx) - (Tx, T^*T^2x) + (Tx, Tx)\\ &= (T^2x, T^2x) - (T^2x, T^2x) - (T^2x, T^2x) + (Tx, Tx)\\ &= \|Tx\|^2 - \|T^2x\|^2 = 0 \qquad ((3) \text{ より})\end{aligned}$$

であることより，

$$T^*TT = T = TT^*T$$

を得る．つまり T は quasinormal である．これと，Theorem 1 によって証明を終わる． □

Remark 1. ここで，Theorem 3 の別証明を紹介しよう．(3) より $N(T)^{\perp}$ は $R(T)$ を含むことがわかる．つまり，$N(T)^{\perp}$ は T の invariant subspace であることにより，それは T を reduce することがわかり，T は isometry とゼロの直和であることがわかる．

Theorem 1, Theorem 2, Theorem 3 から，次のより正確な精密化が簡単に示される．

Corollary 4. T が partial isometry ならば，次の条件 (i)~(iv) はすべて同値になる．

(i) T は quasinormal,

(ii) T は subnormal,

(iii) T は hyponormal,

(iv) T は paranormal.

Remark 2. (i) 以上の parallelism を次にまとめてみよう．

$$\begin{aligned} \text{normal partial isometry } T &\iff T = \text{unitary} \oplus 0 \\ \text{quasinormal partial isometry } T &\iff T = \text{isometry} \oplus 0 \end{aligned}$$

(ii) §2.2.1 の Figure 11 は (i) で述べた関係を表していると考えることもできる．

§3.7.2 normal や partial isometry になるための条件 (I)

T が projection，すなわち $T^2 = T$ かつ $T^* = T$ ならば $\|T\| \leq 1$ となる．逆に，次に示すように $T^2 = T$ かつ $\|T\| \leq 1$ ならば，T は projection となる．

Theorem 1. T が idempotent (つまり，$T^2 = T$) かつ contraction (つまり，$\|T\| \leq 1$) であれば，T は projection である．

Proof.

$$\begin{aligned} \|Tx - T^*Tx\|^2 &= \|Tx\|^2 - (Tx, T^*Tx) - (T^*Tx, Tx) + \|T^*Tx\|^2 \\ &= \|Tx\|^2 - (T^2x, Tx) - (Tx, T^2x) + \|T^*Tx\|^2 \end{aligned}$$

$$= \|Tx\|^2 - \|Tx\|^2 - \|Tx\|^2 + \|T^*Tx\|^2 \qquad (T^2 = T \text{ より})$$
$$= \|T^*Tx\|^2 - \|Tx\|^2 \le 0 \qquad (\|T^*\| = \|T\| \le 1 \text{ より})$$

よって $T = T^*T$, つまり T は self-adjoint. ゆえに, T は projection となる. □

Corollary 2.
(i) T が idempotent かつ normaloid ならば, T は projection となる.
(ii) T が idempotent かつ paranormal ならば, T は projection となる.

Proof. (i) Theorem 1 によって $\|T\| \le 1$ だけを示せば十分である. T が idempotent かつ normaloid であれば, §2.5.4 の Theorem 2 によって,

$$\|T\| = \|T^2\| = \|T\|^2.$$

よって $\|T\| \le 1$ である.
(ii) §2.6.1 の Theorem 2 によって, paranormal ならば normaloid であるから, (i) より明らか. □

次に, Theorem 1 において idempotent という条件を弱めた次の結果を示そう.

Theorem 3. T が contraction であり,

(1) $$\text{ある整数 } k \ge 2 \text{ に対して} \quad T^k = T$$

であれば, T^{k-1} は projection となる.

Proof. (1) によって,

$$T^{2(k-1)} = T^{k-2}T^k = T^{k-2}T = T^{k-1}.$$

つまり T^{k-1} は idempotent になる. よって Theorem 1 から T^{k-1} は projection となる. □

Theorem 4. T が contraction かつ (1) を満たすとき, T は normal かつ partial isometry となる.

便利のため，ここでは Theorem 4 の証明を 2 つ紹介しよう．

Proof of Theorem 4 (I). T **の normality.** §2.1.3 の Theorem 4 の (i) により，$\|Tx\| = \|T^*x\|$ だけを示せばよい．T が contraction であり，Theorem 3 によって T^{k-1} は projection であるから，

$$\|Tx\| = \|T^k x\| = \|TT^{k-1}x\| = \|TT^{*k-1}x\|$$
$$\leq \|T\|\,\|T^{*k-2}\|\,\|T^*x\| \leq \|T\|\,\|T^*\|^{k-2}\|T^*x\| \leq \|T^*x\|.$$

一方，

$$\|T^*x\| = \|T^{*k}x\| = \|T^*T^{*k-1}x\| = \|T^*T^{k-1}x\|$$
$$\leq \|T^*\|\,\|T^{k-2}\|\,\|Tx\| \leq \|T^*\|\,\|T\|^{k-2}\|Tx\| \leq \|Tx\|.$$

よって $\|Tx\| = \|T^*x\|$ がわかり，T の normality が示された．

T **の partial isometry 性.**

$$\begin{aligned}
\|Tx - TT^*Tx\|^2 &= \|Tx\|^2 - (Tx, TT^*Tx) - (TT^*Tx, Tx) + \|TT^*Tx\|^2 \\
&= \|Tx\|^2 - 2\|T^*Tx\|^2 + \|TT^*Tx\|^2 \\
&\leq \|Tx\|^2 - 2\|T^*Tx\|^2 + \|T^*Tx\|^2 \qquad (\|T\| \leq 1 \text{ より}) \\
&= \|Tx\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \\
&= \|T^kx\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \qquad ((1) \text{ より}) \\
&= \|T^{k-1}Tx\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \\
&= \|T^{*k-2}T^*Tx\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \qquad (T^{k-1} \text{ は projection より}) \\
&\leq \|T^*\|^{k-2}\|T^*Tx\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \\
&\leq 0 \qquad (\|T^*\| = \|T\| \leq 1 \text{ より})
\end{aligned}$$

よって $T = TT^*T$. つまり T は partial isometry である． □

Theorem 4 の 2 番目の証明を与えるために，次の補題を示す．

Lemma 1. $\|T\| \leq 1$, $\|T^{-1}\| \leq 1$ ならば，T は unitary となる．

Proof. $\|T^*\| = \|T\| \leq 1$, $\|T^{-1}\| \leq 1$ であることより，任意の x に対して

$$\begin{aligned}
\|(T^* - T^{-1})x\|^2 &= \|T^*x\|^2 - (T^{-1}x, T^*x) - (T^*x, T^{-1}x) + \|T^{-1}x\|^2 \\
&= \|T^*x\|^2 - 2(x,x) + \|T^{-1}x\|^2
\end{aligned}$$

$$\leq \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2$$
$$= 0.$$

よって $T^* = T^{-1}$. つまり T は unitary である. □

Proof of Theorem 4 (II). T が contraction であることより, Theorem 3 から $T^{k-1} = P$ が projection となり, $T = T_1 \oplus T_2$ と分解できる. ここで $T_1 = T|R(P)$, $T_1 = T|N(P)$ とする. そして $TP = PT$ が成り立つことより, P の initial space $N(P)^\perp$ は T を reduce する. よって

$$\begin{aligned} T = T^{k-1}T &= (T_1^{k-1} \oplus T_2^{k-1})(T_1 \oplus T_2) \\ &= (I \oplus 0)(T_1 \oplus T_2) \\ &= T_1 \oplus 0. \end{aligned}$$

いま, $R(P)$ 上で $T_1^{k-1} = I$ であることより,

$$\|T_1^{-1}\| = \|T_1^{k-2}\| \leq \|T_1\|^{k-2} \leq 1.$$

よって, $\|T_1\| \leq 1$, $\|T_1^{-1}\| \leq 1$ を得る. ゆえに Lemma 1 によって, T_1 は unitary になり, $T = \text{unitary} \oplus 0$ となる. つまり §3.7.1 の Remark 2 の (i) から T は normal partial isometry となり, 2 番目の証明ができた. □

Corollary 5.

(i) T が normaloid で (1) を満たせば, T は normal partial isometry となる.

(ii) T が paranormal で (1) を満たせば, T は normal partial isometry となる.

Proof. (i) もし, T が normaloid ならば, Corollary 2 の証明からも

$$\|T^k\| = \|T\|^k = \|T\|$$

がわかる. よって $\|T\| \leq 1$ であるから, Theorem 4 によって証明ができる.

(ii) §2.6.1 の Theorem 2 によって paranormal は normaloid になることがわかるので, (i) より明らか. □

Theorem 4 から次の結果が簡単に得られる.

Corollary 6. T が normaloid で $T^k = I$ を満たすならば, T は unitary になる.

§3.7.3 normal や partial isometry になるための条件 (II)

次に, §3.7.2 の Theorem 1 を拡張しよう.

Theorem 1. T が idempotent かつ $w(T) \leq 1$ を満たすならば, T は projection になる.

Proof. $x \in R(T)^\perp$ に対して, $y = Tx$ とおく. すると任意の正の数 t に対して,

$$T(x + ty) = (1 + t)y$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} t(1+t)\|y\|^2 &= ((1+t)y, x + ty) \\ &= (T(x+ty), x+ty) \\ &\leq \|x + ty\|^2 \qquad (w(T) \leq 1 \text{ より}) \\ &= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 \qquad ((x, y) = 0 \text{ より}). \end{aligned}$$

ゆえに $t\|y\|^2 \leq \|x\|^2$ であることより, $y = 0$ が成り立つ. これらのことより, $R(T)^\perp$ では $T = 0$, $R(T)$ では $T = I$ であるから, T は projection となる. □

Theorem 2. T が §3.7.2 の (1) を満たし, $w(T) \leq 1$ ならば, T は unitary とゼロの直和になる. つまり normal partial isometry になる.

Corollary 3. T がある整数 $k \geq 2$ に対して $T^k = I$ を満たす spectraloid 作用素であれば, T は normal partial isometry になる.

Theorem 2 は §3.7.2 の Theorem 4 の拡張になっている. また, Corollary 3 は §3.7.2 の Corollary 5 の拡張となっている. Theorem 1 を用いれば, これらの結果を示すことはできるが, ここでは証明は省略する.

§3.7 に関するメモ・注釈・参考文献

T.Furuta

[1] *Some theorems on unitary ρ-dilations of Sz.-Nagy and Foias*, Acta Sci. Math. (Szeged), **33**(1972), 119–122.

[2] *Partial isometries and similar operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **23**(1978), 1157–1166.

T.Furuta and R.Nakamoto

[1] *Some theorems on certain contraction operators*, Proc. Japan Acad., **45**(1969), 565–567.

[2] *Certain numerical radius contraction operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **29**(1971), 521–524.

P.R.Halmos *Hilbert Space Problem Book*, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.

§3.7.1 の Theorem 2 は [Halmos 1967] で示されている.

[Halmos 1967] において [Solution 161] の証明中に彼は "partial isometry の場合, subnormal 性と hyponormal 性は同値であるという非常に興味深いことが成り立つ" と記している. そして, §3.7.1 の Corollary 4 はこの解答よりもより精密な拡張になっている.

§3.7.1 の Theorem 1, Theorem 3, Corollary 4 は [Furuta 1978] で示されている.

§3.7.2 における結果は [Furuta-Nakamoto 1969] により, §3.7.3 における結果は [Furuta-Nakamoto 1971] による.

§3.7.3 でのさらなる発展は [Furuta 1972] による.

§3.8 weighted mixed Schwarz 不等式と一般化 Schwarz 不等式

Theorem 1. ヒルベルト空間 H 上の任意の作用素 T に対して,

$$(\mathrm{I}_1) \qquad |(Tx,y)|^2 \le (|T|^{2\alpha}x,x)(|T^*|^{2(1-\alpha)}y,y)$$

が任意の $x,y \in H$, 任意の実数 $0 \le \alpha \le 1$ で成り立つ.

(i) $0 < \alpha < 1$ のとき, 等号は $|T|^{2\alpha}x$ と T^*y, もしくは Tx と $|T^*|^{2(1-\alpha)}y$ が線形従属であるときに限り成り立つ.

(ii) $\alpha = 1$ のとき, 等号は Tx と y が線形従属であるときに限り成り立つ.

(iii) $\alpha = 0$ のとき, 等号は x と T^*y が線形従属であるときに限り成り立つ.

Proof. $\alpha = 1$ や $\alpha = 0$ のときは明らかに成り立つので, $0 < \alpha < 1$ の場合のみを示せばよい.

(I_1) の証明. $T = U|T|$ を T の極分解とする. ここで U は partial isometry とし,

$$|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}, \qquad N(U) = N(|T|)$$

である. ただし $N(S)$ は作用素 S の核とする. 最初に, §2.2.2 の Theorem 4 の (ii) で示した次の重要な関係式をあげておこう.

$$(1) \qquad \text{任意の正数 } q \text{ に対して} \quad |T^*|^q = U|T|^q U^*.$$

ここで $\beta = 1 - \alpha$ とおくと, (1) より次の式が得られる.

$$\begin{aligned} |(Tx,y)|^2 &= |(U|T|x,y)|^2 = |(|T|x,U^*y)|^2 \\ &= |(|T|^\alpha x, |T|^\beta U^*y)|^2 \\ &\le \||T|^\alpha x\|^2 \, \||T|^\beta U^*y\|^2 \\ &= (|T|^{2\alpha}x,x)(U|T|^{2\beta}U^*y,y) = (|T|^{2\alpha}x,x)(|T^*|^{2\beta}y,y). \end{aligned}$$

よって不等式 (I_1) が得られた.

(I_1) の等号条件の吟味. 上の不等式の等号条件は $|T|^\alpha x$ と $|T|^\beta U^*y$ が線形従属であることであり, それは §2.2.2 の (*) を $|T|$ に対して用いることによって, $|T|^\alpha x$ と $|T|U^*y$ が線形従属であることと同値である. さらにそれらは,

$$(2) \qquad |T|^{2\alpha}x \text{ と } T^*y \text{ が線形従属}$$

と同値である．

一方 (I_1) の等号条件は $|T|^{\alpha}x$ と $|T|^{\beta}U^*y$ が線形従属であることであり，それは §2.2.2 の (*) を $|T|$ に対して用いることによって，$|T|x$ と $|T|^{2\beta}U^*y$ が線形従属であることと同値である．さらにそれらは，§2.2.2 の (*) を $|T|$ に対して用いることと $N(U)=N(|T|)$ であることより，$U|T|x$ と $U|T|^{2\beta}U^*y$ が線形従属であることと同値になる．そして (1) によって，それらは

(3) Tx と $|T^*|^{2\beta}y$ は線形従属

と同値になる．よって，(2) が成り立つことと，(3) が成り立つことは同値になり，(I_1) の等号条件は (2), もしくは (3) が成り立つことになる．よって証明ができた． □

Theorem 1 において $\alpha=\frac{1}{2}$ とおくことによって，次の系を簡単に得る．

Corollary 2. ヒルベルト空間 H 上の任意の作用素 T に対して，

$$|(Tx,y)|^2 \le (|T|x,x)(|T^*|y,y)$$

が任意の $x,y\in H$ に対して成り立つ．そして等号は，$|T|x$ と T^*y, もしくは Tx と $|T^*|y$ が線形従属の場合に限り成り立つ．

Corollary 3. ヒルベルト空間 H 上の任意の正値作用素 T に対して，

$$|(Tx,y)|^2 \le (Tx,x)(Ty,y)$$

が任意の $x,y\in H$ に対して成り立つ．そして等号は，Tx と Ty が線形従属の場合に限り成り立つ．

Remark 1. Corollary 2 の不等式が “mixed Schwarz 不等式” とよばれていることより，Theorem 1 の不等式 (I_1) は “weighted mixed Schwarz 不等式” とよぶことができるだろう．また，Corollary 3 において $T=I$ とおくことによって，Schwarz の不等式 $|(x,y)|\le\|x\|\,\|y\|$ を導くことより，Corollary 3 は “generalized Schwarz 不等式” (一般化 Schwarz 不等式) とよばれている．

Remark 2. Theorem 1 の等号条件は $|T|^{2\alpha}x$ と $|T^*|^{2(1-\alpha)}y$ が線形従属であることと思うかもしれない．しかし，これには次の反例があげられる．

$$T=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\qquad \alpha=\frac{1}{2}$$

とおく．すると $|T^*|y = 2|T|x$ であるが，

$$|(Tx,y)|^2 = 36 \neq (|T|x,x)(|T^*|y,y) = 54.$$

よって $0 < \alpha < 1$ の場合は，Theorem 1 の等号条件は "$|T|^{2\alpha}x$ と T^*y, もしくは Tx と $|T^*|^{2(1-\alpha)}y$ が線形従属" であることを強調したい．

Theorem 1 の (I_1) は次のように理解することができる．

$$(\mathrm{I}_1') \qquad \begin{vmatrix} (|T|^{2\alpha}x,x) & (Tx,y) \\ (T^*y,x) & (|T^*|^{2(1-\alpha)}y,y) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Theorem 1 の (I_1) の等号条件は，$|T|^{2\alpha}x$ と T^*y, もしくは Tx と $|T^*|^{2(1-\alpha)}y$ が線形従属であるということより，次のように記憶しておくとよい．Theorem 1 の等号条件は，(I_1') の第 1 列の 2 つのベクトル $|T|^{2\alpha}x$ と T^*y, もしくは 第 2 列の 2 つのベクトル Tx と $|T^*|^{2(1-\alpha)}y$ が線形従属であることである．

すなわち，(I_1') は Theorem 1 の (I_1) の等号条件を気づかせるのに (I_1) より便利であることがわかる．

このことより，Theorem 1 の (I_1) は，(I_1) と同値な

$$|(Tx,y)| \leq \||T|^{\alpha}x\| \, \||T^*|^{1-\alpha}y\|$$

とするよりも等号条件を思い出しやすい (I_1) の形にしたほうが便利である．また，Theorem 1 の等号条件から $|T|^{\alpha}x$ と $|T^*|^{1-\alpha}y$ が線形従属でないような例も得ることができる．

§3.8 に関するメモ・注釈・参考文献

T.Furuta *A simplified proof of Heinz inequality and scrutiny of its equality*, Proc. Amer. Math. Soc., **97**(1986), 751–753.

P.R.Halmos *Hilbert Space Problem Book*, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.

次の問題は，[2nd edition, Halmos 1982] の **Problem 138** より引用したものである．"任意の作用素 T に対して，$|(Tx,y)|^2 \leq (|T|x,x)(|T|y,y)$ は成り立つのか? $|T|$ のところを $|T^*|$ にしたらどうなるだろうか? $|T|$ と $|T^*|$ を両方用いたらどうなるだろうか?" この問題に対して，Corollary 2 は [Halmos 1967] の **Problem 138** のひとつの解答として引用されている．そして [Furuta 1986] で示された Theorem 1 は Corollary 2 の拡張である．

§3.9 Selberg の不等式

次にあげるのは，prime number theory (素数理論) などで非常に有用な Selberg の不等式である．なお，Selberg の不等式は Bessel の不等式の拡張となっている．

Theorem 1 (Selberg (セルバーグ) の不等式). $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ をヒルベルト空間 H 上のゼロでないベクトルとする．このとき，

$$(\mathrm{I}_1)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{|(x, x_i)|^2}{\sum_{j=1}^{n} |(x_i, x_j)|} \leq \|x\|^2$$

が成り立つ． そして (I_1) の等号は，各 $i \neq j$ に対して $(x_i, x_j) = 0$，または $|a_i| = |a_j|$ かつ $(a_i x_i, a_j x_j) \geq 0$ が成り立つような複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して，$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ となるときに限り成り立つ．

Proof.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}(x, x_i) + \sum_{i,j}^{n} a_i \overline{a_j}(x_i, x_j) \\
&\leq \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}(x, x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} (|a_i|^2 + |a_j|^2)|(x_i, x_j)| \\
&= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}(x, x_i) + \sum_{i=1}^{n} \left\{ |a_i|^2 \sum_{j=1}^{n} |(x_i, x_j)| \right\}.
\end{aligned}$$

ここで，$a_i = \dfrac{(x, x_i)}{\sum_{j=1}^{n} |(x_i, x_j)|}$ とおくことによって，求める式 (I_1) を得る．

(I_1) の等号条件は，次の (1), (2) と同値である．

$$(1)\qquad x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

$$(2)\qquad \sum_{i,j}^{n} a_i \overline{a_j}(x, x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} (|a_i|^2 + |a_j|^2)|(x_i, x_j)|.$$

そして条件 (2) は次の (3) と同値になる．

$$(3)\qquad \sum_{i,j}^{n} 2\,\mathrm{Re}\{a_i \overline{a_j}(x_i, x_j)\} = \sum_{i,j}^{n} (|a_i|^2 + |a_j|^2)|(x_i, x_j)|$$

一方，次の (4) は任意の i, j に対してつねに成り立つ．

(4) $$2\mathrm{Re}\{(a_ix_i, a_jx_j)\} \leq 2|a_i|\,|a_j|\,|(x_i, x_j)| \leq (|a_i|^2 + |a_j|^2)|(x_i, x_j)|.$$

よって，(3), (4) を比較することにより，(3) は各 i, j に対して次の (5) または (6) を満たすことと同値になる．

(5) $$i \neq j \text{ に対して } (x_i, x_j) = 0,$$

(6) $$(a_ix_i, a_jx_j) = |(a_ix_i, a_jx_j)| \quad \text{かつ} \quad |a_i| = |a_j|.$$

よって証明ができた． □

Remark 1. Theorem 1 において，次の (C_1), (C_2) は (I_1) が等号になるための十分条件である．

(C_1) $x = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$ が次の条件を満たす複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して成り立つ：すべての $i \neq j$ に対して $(x_i, x_j) = 0$.

(C_2) $x = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$ が次の条件を満たす複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して成り立つ：すべての i, j に対して $|a_i|$ は一定であり，$(a_ix_i, a_jx_j) \geq 0$.

ところが (C_1) と (C_2) はつねに (I_1) の等号条件の必要条件とはならないことが次の例よりわかる．x_1, x_2, x_3 を次のようにとる．

$$x_1 = (1, 0, 0), \qquad x_2 = (0, 1, 0), \qquad x_3 = (1, 0, 1).$$

ここで，$x = x_1 + 2x_2 + x_3$ とおくと，(C_1), (C_2) のどちらも成り立たないが，(I_1) の等号が成立する．いわば Theorem 1 の (I_1) の等号が成り立つための必要十分条件は，(C_1) と (C_2) の "mixed type" ということになる．

Theorem 2. ヒルベルト空間 H 上の任意の作用素 T とゼロでないベクトル $x_1, x_2, \ldots, x_n \notin N(T^*)$ に対して，

(I_2) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{|(Tx, x_i)|^2}{\sum_{j=1}^{n} |(|T^*|^{2(1-\alpha)}x_i, x_j)|} \leq (|T|^{2\alpha}x, x)$$

が任意のベクトル $x \notin N(T)$, 任意の実数 $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して成り立つ．

(i) $0 < \alpha < 1$ のとき．(I_2) の等号条件は，各 $i \neq j$ に対して，

$(|T^*|^{2(1-\alpha)}x_i, x_j) = 0$，または

$$|a_i| = |a_j| \text{ かつ } (a_i|T^*|^{2(1-\alpha)}x_i, a_jx_j) \geq 0$$

が成り立つような複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して,

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} a_i|T^*|^{2(1-\alpha)}x_i \qquad \left(\text{または } |T|^{2\alpha}x = \sum_{i=1}^{n} a_iT^*x_i\right)$$

が成り立つことである.

(ii) $\alpha = 1$ のとき. (I_2) の等号条件は, 各 $i \neq j$ に対して,

$$(x_i, x_j) = 0, \text{ または } |a_i| = |a_j| \text{ かつ } (a_ix_i, a_jx_j) \geq 0$$

が成り立つような複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して,

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

が成り立つことである.

(iii) $\alpha = 0$ のとき. (I_2) の等号条件は, 各 $i \neq j$ に対して,

$$(T^*x_i, T^*x_j) = 0, \text{ または } |a_i| = |a_j| \text{ かつ } (a_iT^*x_i, a_jT^*x_j) \geq 0$$

が成り立つような複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して,

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_iT^*x_i$$

が成り立つことである.

Proof. $\alpha = 1$ または $\alpha = 0$ の場合は Theorem 1 より明らか. よって $0 < \alpha < 1$ の場合のみを考えればよい. $T = U|T|$ を T の極分解とする. ここで U は partial isomery, $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $N(U) = N(|T|)$ である.

Theorem 2 を示すために, 次の 2 つの重要な関係式をあげておこう.

(7) $N(S^q) = N(S)$ が任意の正値作用素 S と任意の正数 q に対して成り立つ.

(8) $|T^*|^q = U|T|^qU^*$ が任意の正数 q に対して成り立つ.

なお, (7) は明らかに成り立ち, (8) は §2.2.2 の Theorem 4 で示されている.

Theorem 1 において, x を $|T|^\alpha x$ に, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して x_i を $|T|^\beta U^*x_i$ とおく. ここで $\beta = 1 - \alpha$ とする. すると (8) より

$$(|T|^\beta U^*x_i, |T|^\beta U^*x_j) = (U|T|^{2\beta}U^*x_i, x_j) = (|T^*|^{2\beta}x_i, x_j).$$

ここで (7) より

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \notin N(|T^*|^\beta) = N(|T^*|) = N(T^*)$$

が得られ，Theorem 1 の (I_1) によって (I_2) が示された．また，(7) を $|T|$ に対して用いることによって

$$|T|^\alpha x = \sum_{i=1}^n a_i |T|^\beta U^* x_i \iff |T|^{2\alpha} x = \sum_{i=1}^n a_i |T| U^* x_i = \sum_{i=1}^n a_i T^* x_i.$$

一方，

$$\begin{aligned} & |T|^\alpha x = \sum_{i=1}^n a_i |T|^\beta U^* x_i \\ \iff & |T| x = |T|^{\alpha+\beta} x = \sum_{i=1}^n a_i |T|^{2\beta} U^* x_i \qquad (|T| \text{ に対しての (7) より}) \\ \iff & U|T| x = \sum_{i=1}^n a_i U |T|^{2\beta} U^* x_i \qquad (N(U) = N(|T|) \text{ より}) \\ \iff & T x = \sum_{i=1}^n a_i |T^*|^{2\beta} x_i \qquad ((8) \text{ より}). \end{aligned}$$

よって証明ができた． □

Remark 2. Selberg の不等式より，§1.4.4 の Theorem 1 の Bessel の不等式を得ることができる．そして Bessel の不等式の等号条件はちょうど §1.4.4 の Theorem 3 そのものである．そして (C_1) は Parseval の等式の成り立つ必要十分条件となっている．つまり，Selberg の不等式の等号の成り立つ条件は Parseval の等式の成り立つ条件 (C_1) よりも弱い条件になっている．これは自然なことである．なぜならば，Selberg の不等式は Bessel の不等式の拡張になっているからである．

§3.9 に関するメモ・注釈・参考文献

E. Bombieri *Le Grand grible dans la Théorie Analytique des Nombres*, Astérisque **18**, Société Mathématique de France, 1974.

T.Furuta

[1] *A simplified proof of Heinz inequality and scrutiny of its equality*, Proc. Amer. Math. Soc., **97**(1986), 751–753.

[2] *When does the equality of a generalized Selberg inequalty hold?*, Nihonkai Math. J., **2**(1991), 25–29.

K.Kubo and F.Kubo *Diagonal matrix dominates a positive semidefinite matrix and Selberg's inequality*, 1991, unpublished.

Theorem 1 は [Bombieri 1974] により，Theorem 1 と Theorem 2 の簡潔な証明は [Furuta 1991] による．また，Theorem 2 の (I_2) は [K.Kubo and F.Kubo 1991] による．

§3.10 Heinz-Kato の不等式の拡張

Theorem 1. T をヒルベルト空間 H 上の作用素とする．もし A, B が任意の $x, y \in H$ に対して

$$\|Tx\| \leq \|Ax\|, \qquad \|T^*y\| \leq \|By\|$$

を満たす正値作用素ならば，すべての $x, y \in H$ に対して，次の不等式

(1) $$|(T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y)| \leq \|A^\alpha x\| \, \|B^\beta y\|$$

が $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta \geq 1$ を満たす α, β で成り立つ．

Theorem 1 を示すために，次の補題を用意しておく．

Lemma 1. S を正値作用素とする．このとき，

(i) $(Sx, x) = 0$ があるベクトル x で成り立つことと，$Sx = 0$ は同値である．

(ii) $N(S^q) = N(S)$ が任意の正の実数 q に対して成り立つ．ここで $N(X)$ は作用素 X の核とする．

Proof of Theorem 1. 次にあげるのは大変便利な Löwner-Heinz の不等式である．

(2) $$A \geq B \geq 0 \text{ ならば } A^\alpha \geq B^\alpha \text{ が } \alpha \in [0,1] \text{ で成り立つ．}$$

また，すべての $x \in H$ に対して $\|Tx\| \leq \|Ax\|$ である，という仮定は次の不等式と同値である．

(3) $$|T|^2 \leq A^2.$$

さらに，すべての $y \in H$ に対して $\|T^*y\| \leq \|By\|$ である，というこちらの仮定は次の不等式と同値である．

(4) $$|T^*|^2 \leq B^2.$$

ここで (2) を (3), (4) へ適用すると，任意の $x, y \in H$ に対して，

(5) $$(|T|^{2\alpha}x, x) \leq (A^{2\alpha}x, x) \text{ が } \alpha \in [0,1] \text{ で成り立ち，}$$

(6) $$(|T^*|^{2\beta}y, y) \leq (B^{2\beta}y, y) \text{ が } \beta \in [0,1] \text{ で成り立つ．}$$

さて，$N(X)$ を作用素 X の核としよう．そして $T = U|T|$ を作用素 T の極分解と

しよう．ただし U は partial isometry で $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $N(U) = N(|T|)$ とする．

$\beta > 0$, $\alpha + \beta \geq 1$ を満たす $\alpha, \beta \in [0,1]$ の場合．§2.2.2 の Theorem 4 の (ii) で示された次の重要な関係式をもう一度あげておこう．

$$(7) \qquad |T^*|^{2\beta} = U|T|^{2\beta}U^* \quad \text{は任意の } \beta > 0 \text{ で成り立つ．}$$

このとき，すべての $x, y \in H$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad |(T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y)|^2 &= |(U|T|^{\alpha+\beta}x, y)|^2 \\
&= |(|T|^{\alpha}x, |T|^{\beta}U^*y)|^2 \\
&\leq \||T|^{\alpha}x\|^2 \||T|^{\beta}U^*y\|^2 \\
&= (|T|^{2\alpha}x, x)(U|T|^{2\beta}U^*y, y) \\
&= (|T|^{2\alpha}x, x)(|T^*|^{2\beta}y, y) \qquad ((7) \text{ より}) \\
&\leq (A^{2\alpha}x, x)(B^{2\beta}y, y) \qquad ((5), (6) \text{ より})
\end{aligned}
$$

が $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta \geq 1$ を満たすような任意の α, β に対して成り立つ．

$\beta = 0$ の場合は明らかに (1) が成り立ち，これによって Theorem 1 の証明ができた． □

Remark 1. ここで，等号条件を次のように吟味してみよう．$\alpha > 0, \beta > 0$ の場合，"ある x, y に対して (1) の等号の等号が成り立つのは，$|T|^{2\alpha}x$ と $|T|^{\alpha+\beta-1}T^*y$ が線形従属であり，$|T|^{2\alpha}x = A^{2\alpha}x$, $|T^*|^{2\beta}y = B^{2\beta}y$ が同時に成り立つときに限る．" 実際，$\alpha > 0$, $\beta > 0$ の場合，(8) の最初の不等式の等号が成り立つ必要十分条件は，$|T|^{\alpha}x$ と $|T|^{\beta}U^*y$ が線形従属，つまり Lemma 1 の (ii) によって，$|T|^{2\alpha}x$ と $|T|^{\alpha+\beta-1}|T|U^*y$ が線形従属になることである．よって，$|T|^{2\alpha}x$ と $|T|^{\alpha+\beta-1}T^*y$ が線形従属となる．

(8) の最後の不等式の成り立つ必要十分条件は (5), (6) の等号が同時に成り立つことである．つまり，Lemma 1 の (i) によって $|T|^{2\alpha}x = A^{2\alpha}x$, $|T^*|^{2\beta}y = B^{2\beta}y$ が同時に成り立つことになる．

よって，(1) の等号条件が示すことができた．

Remark 2. 条件 $|T|^{2\alpha}x$ と $|T|^{\alpha+\beta-1}T^*y$ が線形従属であることと，$T|T|^{\alpha+\beta-1}x$ と $|T^*|^{2\beta}y$ が線形従属であることは同値であることに注意する．

実際に，前の条件は上に述べた (8) の最初の不等式の等号が成り立つ必要十分条件の証明より，$|T|^{\alpha}x$ と $|T|^{\beta}U^*y$ が線形従属であることと同値になり，これは Lemma 1 の (ii) と $N(U) = N(|T|)$ によって，$U|T|^{\alpha+\beta}x$ と $U|T|^{2\beta}U^*y$ が線形従属であることと同値になる．すなわち (7) によって，$T|T|^{\alpha+\beta-1}x$ と $|T^*|^{2\beta}y$ が線形従属となる．

Remark 3. T が正値作用素か可逆な作用素のときは, Theorem 1 の条件 $\alpha+\beta \geq 1$ は必要ない. これは Theorem 1 の証明より簡単にわかる.

Theorem 1 において $\alpha+\beta=1$ とおくと, Theorem 1 から, 次のよく知られた Heinz-Kato の不等式とよばれる Theorem H-K を得る.

Theorem H-K (Heinz-Kato (ハインツ–加藤) の不等式).
T をヒルベルト空間 H 上の任意の作用素とする. もし, A と B が任意の $x, y \in H$ に対して,

$$\|Tx\| \leq \|Ax\|, \qquad \|T^*y\| \leq \|By\|$$

が成り立つような正値作用素ならば, すべての $x, y \in H$ に対して次の不等式が $\alpha \in [0,1]$ で成り立つ.

$$|(Tx, y)| \leq \|A^\alpha x\| \, \|B^{1-\alpha} y\| \tag{9}$$

§3.10 に関するメモ・注釈・参考文献

T.Furuta *An extension of the Heinz-Kato theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **120**(1994), 785–787.

E. Heinz *Beitäge zur Stüngstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415-438.

T.Kato *Notes on some inequalities for linear operators*, Math. Ann., **125**(1952), 208–212.

Theorem H-K に関しては [Heinz 1951] で最初に指摘され, [Kato 1952] においてよりよい形である Theorem H-K 自身が示されている.

Theorem H-K は perturbation theory (摂動理論) のさまざまな問題に対して有効であり, Theorem 1 は [Furuta 1994] によって示されている.

§3.11 Löwner-Heinz の不等式と同値なノルム不等式

Theorem 1. A, B をヒルベルト空間 H 上の正値作用素とすると，次の命題 (1)〜(7) が成り立ち，かつ互いに導くことができる．

(1) $A \geq B \geq 0$ ならば $A^s \geq B^s$ が $s \in [0,1]$ で成り立つ．

(2) $\|AB\|^q \leq \|A^q B^q\|$ が $q \geq 1$ で成り立つ．
いい換えれば $\|A^q B^q\|^{\frac{1}{q}} \leq \|A^p B^p\|^{\frac{1}{p}}$ が $p \geq q > 0$ で成り立つ，すなわち $f(p) = \|A^p B^p\|^{\frac{1}{p}}$ は p についての増加関数である．

(3) $\|A^s B^s\| \leq \|AB\|^s$ が $s \in [0,1]$ で成り立つ．
いい換えれば $\|A^{\frac{1}{s}} B^{\frac{1}{s}}\|^s \leq \|A^{\frac{1}{t}} B^{\frac{1}{t}}\|^t$ が $s \geq t > 0$ で成り立つ，すなわち $g(s) = \|A^{\frac{1}{s}} B^{\frac{1}{s}}\|^s$ は s についての減少関数である．

(4) $\|AB\|^{\frac{p+q}{2}} \leq \|A^p B^p\|^{\frac{1}{2}} \|A^q B^q\|^{\frac{1}{2}}$ が $p \geq 0$, $q \geq 0$, $\dfrac{p+q}{2} \geq 1$ で成り立つ．

(5) $\|A^{st} B^{st}\|^2 \leq \|A^s B^s\|^{\frac{2st}{s+t}} \|A^t B^t\|^{\frac{2st}{s+t}}$ が $s > 0$, $t > 0$, $\dfrac{2st}{s+t} \leq 1$ で成り立つ．

(6) $\|AB\|^{\frac{p+q}{2}} \leq \|A^p B^q\|^{\frac{1}{2}} \|A^q B^p\|^{\frac{1}{2}}$ が $p \geq 0$, $q \geq 0$, $\dfrac{p+q}{2} \geq 1$ で成り立つ．

(7) $\|A^{st} B^{st}\|^2 \leq \|A^s B^t\|^{\frac{2st}{s+t}} \|A^t B^s\|^{\frac{2st}{s+t}}$ が $s > 0$, $t > 0$, $\dfrac{2st}{s+t} \leq 1$ で成り立つ．

Theorem 1 を示すために，次の Lemma 1 を示そう．

Lemma 1. A, B をヒルベルト空間 H 上の正値作用素とすると，

$$\|A^{\frac{s+t}{2}} B^{\frac{s+t}{2}}\|^2 \leq \|B^t A^{s+t} B^s\|$$

が任意の $s \geq 0$, $t \geq 0$ で成り立つ．

Proof. $r(T)$ を作用素 T の spectral radius とする．

$$\begin{aligned}
\|A^{\frac{s+t}{2}} B^{\frac{s+t}{2}}\|^2 &= \|B^{\frac{s+t}{2}} A^{s+t} B^{\frac{s+t}{2}}\| \\
&= r(B^{\frac{s+t}{2}} A^{s+t} B^{\frac{s+t}{2}}) \qquad (\text{§2.5.4 の Theorem 3 より}) \\
&= r(B^t A^{s+t} B^s) \quad (\text{§2.4.1 の Theorem 17 から } r(ST) = r(TS) \text{ より})
\end{aligned}$$

$$\leq \|B^t A^{s+t} B^s\| \qquad (r(T) \leq \|T\| \text{ より}).$$

よって証明ができた. □

Proof of Theorem 1. (3) $D = \{s \in [0,1] : \|A^s B^s\| \leq \|AB\|^s\}$ とおく．すると，D は $0, 1 \in D$ であるような閉集合になる．よって作用素の連続性により $s, t \in D$ であったときに，$\frac{s+t}{2} \in D$ となることを示せばよい．

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{s+t}{2}} B^{\frac{s+t}{2}}\|^2 &\leq \|B^t A^{s+t} B^s\| \qquad (\text{Lemma 1 より})\\ &\leq \|B^t A^t\| \, \|A^s B^s\|\\ &\leq \|AB\|^t \|AB\|^s \qquad (s, t \in D \text{ より})\\ &= \|AB\|^{s+t}.\end{aligned}$$

よって $\|A^{\frac{s+t}{2}} B^{\frac{s+t}{2}}\| \leq \|AB\|^{\frac{s+t}{2}}$．すなわち $\frac{s+t}{2} \in D$ であることから (3) が示された.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3). これは明らかである.

(3) $\Longleftrightarrow$ (1). 最初に，A と B が可逆な作用素だと仮定してもよい．(3) を仮定する．するとノルムの斉次性により，(3) は次の (8) と同値になる.

(8) $\|AB\| \leq 1$ ならば $\|A^s B^s\| \leq 1$ が任意の $s \in [0,1]$ で成り立つ.

ここで，(8) において A を $A^{\frac{-1}{2}}$ に，B を $B^{\frac{1}{2}}$ に置き換えると，(8) は次の命題を意味する．$A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}} \leq 1$ ならば $A^{\frac{-s}{2}} B^s A^{\frac{-s}{2}} \leq 1$．つまり，$A \geq B \geq 0$ ならば $A^s \geq B^s$ が任意の $s \in [0,1]$ で成り立つ．よって (3) $\Longrightarrow$ (1) が示された.

逆に (1) を仮定する．(1) は次の (9) と同値である.

(9) $\|A^{\frac{-1}{2}} B^{\frac{1}{2}}\| \leq 1$ ならば $\|A^{\frac{-s}{2}} B^{\frac{s}{2}}\| \leq 1$ が任意の $s \in [0,1]$ で成り立つ.

ここで (9) において，A を A^{-2}, B を B^2 とおくことによって，(1) $\Longrightarrow$ (3) を得る．よって (1) $\Longleftrightarrow$ (3) が示された.

(2) $\Longrightarrow$ (4), (6). (2) を仮定する．すると，

$$\begin{aligned}\|AB\|^{p+q} &\leq \|A^{\frac{p+q}{2}} B^{\frac{p+q}{2}}\|^2 \qquad \left(\frac{p+q}{2} \geq 1 \text{ から (2) より}\right)\\ &\leq \|B^p A^{p+q} B^q\| \qquad (\text{Lemma 1 より})\\ &\leq \|B^p A^p\| \, \|A^q B^q\|, \text{もしくは } \|B^p A^q\| \, \|A^p B^q\|.\end{aligned}$$

よって，(4), (6) を得た.

(4) または (6) $\Longrightarrow$ (2). (4) または (6) において，$p = q$ とおくと (2) を得る.

(4) $\Longleftrightarrow$ (5) そして (6) $\Longleftrightarrow$ (7). (4) と (6) において，$s = \frac{1}{p}$, $t = \frac{1}{q}$ とおき，A を A^{st} に，B を B^{st} に置き換えることによって，それぞれ (5), (7) を得る．逆は明

らか.

よって，Theorem 1 の証明ができた. □

Remark 1. (2) に関連して，$\|AB\|^q \leq \|A^qB^q\|$ は $1 > q > 0$ に対してつねに成り立つとは限らないということが簡単に確認できる．任意の $p \geq 0$ に対して $h(p) = \dfrac{\|A^pB^p\|}{\|AB\|^p}$ とおく．すると，(4) によって，$h(p)h(q) \geq 1$ が任意の $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q \geq 2$ に対して成り立つ.

ここで，$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{34^{\frac{1}{4}}} < 1$, $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{233}}{34^{\frac{3}{4}}} > 1$ となるが，$h\left(\frac{1}{2}\right)h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{1165}}{34} > 1$ である.

§3.11 に関するメモ・注釈・参考文献

H.O.Cordes *Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series 76, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

T.Furuta *Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Rev. Math. Phys., **1**(1989), 135–137.

E.Heinz *Beitäge zur Stüngstheorie der Spektralzerlegung*, Math Ann., **123** (1951), 415–438.

K.Löwner *Über monotone Matrixfunktionen*, Math. Z., **38**(1934), 177–216.

G.K.Pedersen *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.

T.Kato *Notes on some inequalities for linear operators*, Math. Ann., **125**(1952), 208–212.

Theorem 1 の (1) については非常に多くの証明があり, 例えば [Heinz 1951], [Löwner 1934], [Pedersen 1972], [Kato 1952] などが有名である (§3.2 に関するメモ・注釈・参考文献を参照).

(3) は [Cordes 1987] で，Theorem 1 は [Furuta 1989] で示されている.

§3.12 Heinz の不等式と同値なノルム不等式

本節では，次のノルム不等式の同値関係を示す．

Theorem 1. 次のノルム不等式 (1)∼(6) が成り立ち，互いに導くことができる．

(1) $$\|S_1Q + QS_2\| \geq \|S_1^{\alpha}QS_2^{1-\alpha} + S_1^{1-\alpha}QS_2^{\alpha}\|.$$

(**Heinz (ハインツ) の不等式**)

ここで，S_1 と S_2 は正値作用素であり，$\alpha \in [0,1]$ とする．

(2) $$\|P^*PQ + QRR^*\| \geq 2\|PQR\|.$$

(3) $$\|STR^{-1} + S^{-1}TR\| \geq 2\|T\|.$$

ここで，S と R は可逆な self-adjoint 作用素とする．

(4) $$\|STS^{-1} + S^{-1}TS\| \geq 2\|T\|.$$

ここで，S は可逆な self-adjoint 作用素とする．

(5) $$\|STS^{-1} + S^{-1}TS\| \geq 2\|T\|.$$

ここで，S は可逆な self-adjoint 作用素で T は self-adjoint 作用素とする．

(6) $$\|A^{2m+n}TB^{-n} + A^{-n}TB^{2m+n}\| \geq \|A^{2m}T + TB^{2m}\|.$$

ここで，A と B は可逆な self-adjoint 作用素で，m と n は非不整数とする．

Proof. 次の順序 (1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) で示す．

(1) $\Longrightarrow$ (6). (1) において，

$$\alpha = (2m+n)(2m+2n)^{-1}, \qquad S_1 = A^{2m+2n},$$
$$S_2 = B^{2m+2n}, \qquad Q = A^{-n}TB^{-n}$$

とおくことによって (6) を得る．

(6) $\Longrightarrow$ (5). これは明らかである．

(5) $\Longrightarrow$ (4). $\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ が self-adjoint であることより，

$$\left\|\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\right\| \geq 2\left\|\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}\right\|$$

が成り立つ．よって，

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & STS^{-1} + S^{-1}TS \\ ST^*S^{-1} + S^{-1}T^*S & 0 \end{pmatrix}\right\| \geq 2\left\|\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}\right\|.$$

ゆえに，$\left\|\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix}\right\| = \|X\|$ であることより，$\|STS^{-1} + S^{-1}TS\| \geq 2\|T\|$ を得る．

(4) $\Longrightarrow$ (3)．(4) を仮定する．すると，

$$\left\|\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}^{-1} + 6\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}\right\| \geq 2\left\|\begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|.$$

よって

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix} 0 & STS^{-1} + S^{-1}TS \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| &= \|STR^{-1} + S^{-1}TR\| \\ &\geq 2\|T\|.\end{aligned}$$

(3) $\Longrightarrow$ (2)．P^*P と RR^* を可逆な作用素であると仮定する．すると，

$$\begin{aligned}\|P^*PQ + QRR^*\| &= \|\,|P|\,|P|Q|R^*|\,|R^*|^{-1} + |P|^{-1}|P|Q|R^*|\,|R^*|\,\| \\ &\geq 2\|\,|P|Q|R^*|\,\| \\ &= 2\|PQR\|.\end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1)．最初に，(1) は $\alpha = 0, 1$ では成り立つ．

(1) が μ, λ に対して成り立つとし，

$$0 \leq \mu = \alpha - p < \alpha < \alpha + p = \lambda \leq 1$$

とする．すると，(2) より

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= \|S_1^\alpha Q S_2^{1-\alpha} + S_1^{1-\alpha} Q S_2^\alpha\| \\ &= \|S_1^p(S_1^\mu Q S_2^{1-\lambda} + S_1^{1-\lambda} Q S_2^\mu) S_2^p\|\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\|S_1^{2p}(S_1^{\mu}QS_2^{1-\lambda} + S_1^{1-\lambda}QS_2^{\mu}) + (S_1^{\mu}QS_2^{1-\lambda} + S_1^{1-\lambda}QS_2^{\mu})S_2^{2p}\|$$

$$\leq \frac{1}{2}\|S_1^{\lambda}QS_2^{1-\lambda} + S_1^{1-\lambda}QS_2^{\lambda}\| + \frac{1}{2}\|S_1^{\mu}QS_2^{1-\mu} + S_1^{1-\mu}QS_2^{\mu}\|,$$

つまり

$$f(\alpha) \leq \frac{1}{2}(f(\alpha+p) + f(\alpha-p)).$$

いま，S_1^{α}, S_2^{α} は作用素の norm topology において，$\alpha \in (0,1]$ に連続して依存している．よって，$f(\alpha)$ は開区間 $(0,1)$ 上で連続である．そして上の式とあわせて考えると，$f(\alpha)$ は閉区間 $[0,1]$ 上で下に凸である．さらに $f(\alpha)$ は $\alpha = \frac{1}{2}$ で対称であるから，$f(\alpha)$ は $[0, \frac{1}{2}]$ で減少関数になる．よって求める不等式 (1) が得られた． □

Remark 1. Theorem 1 を経由した Heinz の不等式の簡潔な証明.

Heinz の不等式 (1) の最初の証明は複素解析の知識と複雑な計算を必要としていた．ここで，この有名な不等式の簡潔な証明を以下紹介しよう．

Proof. Theorem 1 の (5) を示す．これにより同値性から (1) を示すことができる．$\lambda \in \sigma(T)$ を $\lambda \neq 0$ とする．すると，$\lambda \in \sigma(STS^{-1}) \subset \overline{W}(STS^{-1})$ が成り立ち，また λ は実数になることより，

$$2\lambda \in 2\,\mathrm{Re}\,\overline{W}(STS^{-1}) = \overline{W}(STS^{-1} + S^{-1}TS),$$

よって，

$$2\|T\| = 2r(T) \leq \|STS^{-1} + S^{-1}TS\|$$

が得られ，(5) が示すことができた．

最後に，Theorem 1 によって Heinz の不等式 (1) を得る． □

§3.12 に関するメモ・注釈・参考文献

S.K.Berberian *Note on a theorem of Fuglede and Putnam*, Proc. Amer. Math. Soc., **10**(1959), 175–182.

G.Corach, H.Porta and L.Recht *An operator inequality*, Linear Algebra Appl., **142**(1990), 153–158.

J.I.Fujii and M.Fujii *A norm inequality for operator monotone functions*, Math. Japon., **35**(1990), 249–252.

J.I.Fujii, M.Fujii, T.Furuta and R.Nakamoto
Norm inequalities equivalent to Heinz inequality, Proc. Amer. Math. Soc., **118**(1993), 827–830.

T.Furuta

[1] *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$*, Proc. Amer. Math. Soc., **101**(1987), 85–88.

[2] *Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Rev. Math. Phys., **1**(1989), 135–137.

T.Furuta and R.Nakamoto *On the numerical range of an operator*, Proc. Japan Acad., **47**(1971), 279–284.

E. Heinz *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

A.McIntosh *Heinz inequalities and perturbation of spectral families*, Macquarie Math. Reports, 1979.

G.K.Pedersen *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.

[Heinz 1951] では，Cordes の不等式 [J.I.Fujii-M.Fujii 1990], [Furuta 1989] と Furuta 不等式 [Furuta 1987] と密接に関連のある非常に有用な一連のノルム不等式が示されている．特に，Theorem 1 の不等式 (1) は Heinz の不等式とよばれ，作用素論においてもっとも本質的な不等式の一つである．しかしながら [Heinz 1951] での最初の証明は複素解析の理論に基づいており，いくぶん複雑である．本節では (5) の簡潔な証明を与えることによって，Theorem 1 より (1) を簡単に得ることができた．

(2) は [McIntosh 1979] で (1) を示すために得られており，(2) $\Longrightarrow$ (1) の非常に精巧な証明は [Pedersen 1972] で用いられているテクニックと非常ににかよっている．

(3) は [Corach-Porta-Recht 1990] で示された (4) の一般化である．(5) はただ単に (4) の特別な場合となっている．(6) は (3) の拡張であるとみなすことができる．

(4) $\Longrightarrow$ (3) で用いられている有用なテクニックは “Berberian magic” とよばれ，[Berberian 1959] で紹介されている．

参考文献

A.Aluthge

[1] *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integral Equations Operator Theory, **13**(1990), 307–315.

[2] *Some generalized theorems on p-hyponormal operators,* Integral Equations Operator Theory, **24**(1996), 497–501.

T.Ando

[1] *Operators with a norm condition*, Acta Sci. Math. (Szeged), **33**(1972), 169–178.

[2] *On some operator inequalities*, Math. Ann., **279**(1987), 157–159.

T.Ando and F.Hiai *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities,* Linear Algebra Appl., **197, 198**(1994), 113–131.

E.Bach and T.Furuta *Order preserving operator inequalities*, J. Operator Theory, **19**(1988), 341–346.

S.K.Berberian

[1] *Note on a theorem of Fuglede and Putnam*, Proc. Amer. Math. Soc., **10**(1959), 175–182.

[2] *Introduction to Hilbert Space*, Chelsea Publishing Company, New York, 1961.

[3] *Conditions on an operator implying* Re $\sigma(T) = \sigma\,(\mathrm{Re}\ T)$, Trans. Amer. Math. Soc., **154**(1971), 267–272.

E. Bombieri *Le Grand Crible dans la Théorie Analytique des Nombres,* Astérisque **18**, Société Mathématique de France, 1974.

N.N.Chan and M.K.Kwong *Hermitian matrix inequalities and a conjecture,* Amer. Math. Monthly, **92**(1985), 533–541.

M.Cho, T.Furuta, J.I.Lee and W.Y.Lee *A folk theorem on Furuta inequality,* Scientiae Mathematicae, **3**(2000), 229–231.

M.Cho and M.Itoh *Putnam's inequality for p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **123**(1995), 2435–2440.

G.Corach, H.Porta and L.Recht *An operator inequality*, Linear Algebra

Appl., **142**(1990), 153–158.

H.O.Cordes *Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series 76, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

P.J.Davis *Interpolation and Approximation*, Dover Publishing, Inc., New York, 1963.

C.L. DeVito *Functional analysis and linear operator theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1990.

W.F.Donoghue *On the Numerical Range of a Bounded Operator,* Michigan Math. J., **4**(1957), 261–263.

B.P.Duggal *On p-hyponormal contractions*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 81–86.

N.Dunford and J.T.Schwartz *Linear operators, I, II and III*, Interscience, New York, 1958, 1963 and 1971.

K.Fan *Some matrix inequalities,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **29** (1966), 185–196.

B.Fuglede *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**(1950), 35-40.

J.I.Fujii and M.Fujii *A norm inequality for operator monotone functions*, Math. Japon., **35**(1990), 249-252.

J.I.Fujii, M.Fujii, T.Furuta and R.Nakamoto *Norm inequalities equivalent to Heinz inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **118**(1993), 827–830.

J.I.Fujii, T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida *Simplified proof of characterization of chaotic order via Specht's ratio*, Scientiae Mathematicae, **2**(1999), 63–64.

J.I.Fujii and E.Kamei

[1] *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon., **34**(1989), 341–348.

[2] *Uhlmann's interpolational method for operator means*, Math. Japon., **34**(1989), 541–547.

M.Fujii *Furuta's inequality and its mean theoretic approach,* J. Operator Theory, **23**(1990), 67–72.

M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem,* Linear Algebra Appl., **179**(1993), 161–169.

M.Fujii, T.Furuta and R.Nakamoto *Applications of Gramian transformation formula*, Scientiae Mathematicae, **3**(2000), 81–86.

M.Fujii, T.Furuta and D.Wang *An application of the Furuta inequality to operator inequalities on chaotic orders*, Math. Japon., **40**(1994), 317–321.

M.Fujii, S.Izumino, R.Nakamoto and Y.Seo *Operator inequalities related to Cauchy-Schwarz and Hölder-McCarthy inequalities,* Nihonkai Math. J., **8**(1997), 117–122.

M.Fujii, J.F.Jiang, E.Kamei and K.Tanahashi *A characterization of chaotic order and a problem,* J. Inequal. Appl., **2**(1998), 149–156.

M.Fujii and E.Kamei *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality,* Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 2751–2756.

M.Fujii, A.Matsumoto and R.Nakamoto *A short proof of the best possibility for the grand Furuta inequality,* J. Inequal. Appl., **4**(1999), 339–344.

M.Fujii and R.Nakamoto *Intertwining algebraic definite operators*, Math. Japon., **25**(1980), 239–240.

T.Furuta

[1] *On the class of paramormal operators*, Proc. Japan Acad., **43**(1967), 594–598.

[2] *An elementary proof of Hadamard's theorem*, Mat. Vesnik, **23**(1971), 267–269.

[3] *Some theorems on unitary ρ-dilations of Sz.-Nagy and Foias*, Acta Sci. Math. (Szeged), **33**(1972), 119–122.

[4] *Some characterizations of convexoid operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **18**(1973), 893–900.

[5] *Relations between generalized growth conditions and several classes of convexoid operators,* Canad. J. Math., **29**(1977), 1010–1030.

[6] *Partial isometries and similar operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **23**(1978), 1157–1166.

[7] *On the polar decomposition of an operator*, Acta Sci. Math. (Szeged), **46**(1983), 261–268.

[8] *A simplified proof of Heinz inequality and scrutiny of its equality*, Proc. Amer. Math. Soc., **97**(1986), 751–753.

[9] $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., **101**(1987), 85–88.

[10] *A characterization of 2-nilpotent operators and hereditary property on the polar decomposition of an operator*, Tensor (N.S.), **46**(1987), 95–98.

[11] *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci., **65**(1989), 126.

[12] *Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Rev. Math.

Phys., **1**(1989), 135–137.

[13] *When does the equality of a generalized Selberg inequality hold?* Nihonkai Math. J., **2**(1991), 25–29.

[14] *Applications of order preserving operator inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl., **59**(1992), 180–190.

[15] *An extension of the Heinz-Kato theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **120**(1994), 785–787.

[16] *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log majorization*, Linear Algebra Appl., **219**(1995), 139–155.

[17] *Generalized Aluthge transformation on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 3071–3075.

[18] *Generalizations of Kosaki trace inequalities and related trace inequalities on chaotic order*, Linear Algebra Appl., **235**(1996), 153–161.

[19] *Applications of order preserving operator inequalities to a generalized relative operator entropy*, General Inequalties 7, Birkhäuser-Verlag, **123**(1997), 65–76.

[20] *Simplified proof of an order preserving operator inequality*, Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci., **74**(1998), 114.

[21] *Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities*, J. Inequal. Appl., **2**(1998), 137–148.

[22] *Results under* $\log A \geq \log B$ *can be derived from ones under* $A \geq B \geq 0$ *by Uchiyama's method—associated with Furuta and Kantorovich type operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **3**(2000), 423–436.

[23] *The Hölder-McCarthy and Young inequalities are equivalent for Hilbert space operators*, to appear in Amer. Math. Monthly, 2000.

T.Furuta, M.Hashimoto and M.Ito *Equivalence relation between generalized Furuta inequality and related operator functions*, Scientiae Mathematicae, **1**(1998), 257–259.

T.Furuta, M.Ito and T.Yamazaki *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes*, Scientiae Mathematicae, **1**(1998), 389–403.

T.Furuta and R.Nakamoto

[1] *Some theorems on certain contraction operators*, Proc. Japan Acad., **45**(1969), 565–567.

[2] *Certain numerical radius contraction operator*, Proc. Amer. Math. Soc., **29**(1971), 521–524.

[3] *On the numerical range of an operator*, Proc. Japan Acad., **47**(1971),

279–284.

T.Furuta and Y.Seo *An application of generalized Furuta inequality to Kantorovich type inequalities*, Scientiae Mathematicae, **2**(1999), 393–399.

T.Furuta and Z.Takeda *A characterization of spectraloid operators and its generalization*, Proc. Japan Acad., **43**(1967), 599–604.

T.Furuta and D.Wang *A decreasing operator function associated with the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **126**(1998), 2427–2432

T.Furuta, T.Yamazaki, and M.Yanagida

[1] *Operator functions implying generalized Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **1**(1998), 123–130.

[2] *Order preserving operator function via Furuta inequality* " $A \geq B \geq 0$ *ensures* $(A^{r/2}A^pA^{r/2})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq (A^{r/2}B^pA^{r/2})^{\frac{1+r}{p+r}}$ *for* $p \geq 1$ *and* $r \geq 0$", Oper. Theory Adv. Appl., **115**(2000), 185–194.

T.Furuta and M.Yanagida

[1] *Further extensions of Aluthge transformation on p-hyponormal operators*, Integral Equations Operator Theory, **29**(1997), 122–125.

[2] *Generalized means and convexity of inversion for positive operators*, Amer. Math. Monthly, **105**(1998), 258–259.

[3] *On powers of p-hyponormal operators*, Scientiae Mathematicae, **2**(1999), 279–284.

[4] *On powers of p-hyponormal and log-hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **5**(2000), 367–380.

M.Goldberg and E.G.Straus *Norm properties of C-numerical radii,* Linear Algebra Appl., **24**(1979), 113–131.

K.E.Gustafson *The Toeplitz-Hausdorff theorem for linear operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **25**(1970), 203–204.

K.E.Gustafson and D.K.M.Rao *Numerical Range*, Springer-Verlag, New York, 1997.

P.R.Halmos

[1] *Introduction to Hilbert space and the theory on spectral multiplicity*, Chelsea, New York, 1951.

[2] *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Litton Educational Publishing, Inc., 1958.

[3] *Hilbert Space Problem Book*, 1st edition, Van Nostrand, 1967 and 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1974, 1982.

F.Hansen *An operator inequality*, Math. Ann., **246**(1980), 249–250.

F.Hausdorff *Der Wertvorrat einer Bilinearform*, Math. Z., **3**(1919), 314–316.

E. Heinz *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung,* Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

日合文雄・柳研二郎 ヒルベルト空間と線型作用素，牧野書店，1995.

T.Huruya *A note on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **125**(1997), 3617–3624 .

入江昭二 位相解析入門，岩波書店，1957.

V. Istratescu, T.Saito and T.Yoshino *On a class of operators*, Tohoku Math. J., **18**(1966), 410–413.

M.Ito

[1] *Some classes of operators associated with generalized Aluthge transformation*, SUT J. Math., **35**(1999), 149–165.

[2] *Several properties on class A including p-hyponormal and log-hyponormal operators,* Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 569–578.

S.Izumino and R.Nakamoto *Functional orders of positive operators induced from Mond-Pecaric convex inequalities,* Scientiae Mathematicae, **2**(1999), 195–200.

E.Kamei

[1] *A satellite to Furuta's inequality,* Math. Japon, **33**(1988), 883–886.

[2] *Monotonicity of the Furuta inequality on its complementary domain,* Math. Japon, **49**(1999), 21–26.

[3] *Parametrization of the Furuta inequality*, Math. Japon, **49**(1999), 65–71.

T.Kato *Notes on some inequalities for linear operators,* Math. Ann. **125**(1952), 208–212.

K.Kitamura and Y.Seo *Inequalities for the Hadamard product of operators,* preprint.

E. Kreyszig *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

F.Kubo and T.Ando *Means of positive linear operators,* Math. Ann., **246** (1980), 883–886.

K.Kubo and F.Kubo *Diagonal matrix dominates a positive semidefinite matrix and Selberg's inequality*, 1991, unpublished.

C.K.Li *C-Numerical ranges and C-numerical radii,* Linear and Multilinear Algebra, **37**(1994), 51–82

C.-S.Lin

[1] *The Furuta inequality and an operator equation for linear operators,* Publ. Res. Inst. Math. Sci., **35**(1999), 309–313.

[2] *Unifying approach to the study of p-hyponormal operators*, Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 579–584.

K.Löwner *Über monotone Matrixfunktionen,* Math. Z., **38**(1934), 177–216.

前田周一郎 函数解析，森北出版，1974.

C.A.McCarthy C_p, Israel J. Math., **5**(1967), 249–271.

A.McIntosh *Heinz inequalities and perturbation of spectral families*, Macquarie Math. Reports, 1979.

B.Mond and J.E.Pečarić

[1] *Convex inequalities in Hilbert spaces,* Houston J. Math., **19**(1993), 405–420.

[2] *A matrix version of the Ky Fan generalization of the Kantorovich inequality*, Linear and Multilinear Algebra, **36**(1994), 217–221.

M.H.Moore *A convex matrix function*, Amer. Math. Monthly, **80**(1973), 408–409.

R.L.Moore, D.D.Rogers and T.Trent *A note on intertwining M-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **83**(1981), 514–516

中村正弘 関数解析入門，槇書店，1968.

M.Nakamura and H.Umegaki *A note on the entropy for operator algebras*, Proc. Japan Acad., **37**(1961), 149–154.

I. Nishitani and Y.Watatani *Some theorems on paranormal operators*, Math. Japon., **21**(1976), 123–126.

S. Ohshiro *Master thesis at Jooetsu University*, 1996.

G.Orland *On a class of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **15**(1964), 75–79.

C.Pearcy *An elementary proof of the power inequality for the nmrical radius,* Michigan Math. J., **13**(1966), 289–291.

G.K.Pedersen *Some operator monotone functions,* Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.

C.R.Putnam

[1] *On normal operators in Hilbert space*, Amer. J. Math., **73**(1951), 357–362.

[2] *On the spectra of semi-normal operators,* Trans. Amer. Math. Soc., **119**(1965), 509–523.

[3] *An inequality for the area of hyponormal spectra,* Math. Z., **116**(1970), 323–330.

D.K.Rao *Operadores paranormales*, Rev. Colombiana Mat., **21** (1987), 135–139.

J.R.Retherford *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem,*

Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

F.Riesz and B.Sz.Nagy *Functional Analysis*, Ungar, 1955.

M.Rosenblum *On a theorem of Fuglede and Putnam*, J. London Math. Soc., **33** (1958), 376–377.

T.Saito and T.Yoshino *On a conjecture of Berberian*, Tohoku Math. J., **17** (1965), 147–149.

Y.Seo *A characterization of operator order via grand Furuta inequality,* to appear in J. Inequal. Appl.

K.Takahashi *On the converse of the Fuglede-Putnam theorem*, Acta Sci. Math. (Szeged), **43**(1981), 123–125.

竹之内脩 函数解析，朝倉書店，1968.

K.Tanahashi

[1] *Best possibility of the Furuta inequality,* Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 141–146.

[2] *On log-hyponormal operators*, Integral Equations Operator Theory, **34** (1999), 364–372.

[3] *The best possibility of the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **128**(2000), 511–519.

A.E.Taylor *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.

O.Toeplitz *Das algbraische Analogon zu einem Satz von Fejér*, Math. Z., **2** (1918), 187–197.

M.Uchiyama *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 469–471.

H.Umegaki (梅垣壽春)

[1] *Conditional expectation in an operator algebra, IV*, (*entropy and information*), Kodai Math. Sem. Rep., **14**(1962), 59–85.

[2] 情報数理の基礎，サイエンス社，1993.

D.Wang

[1] *A convex operator function*, Internat. J. Math. Math. Sci., **11**(1988), 401–402.

[2] *Around the Furuta inequality*, Internat. J. Math. Math. Sci., **18**(1995), 205–207.

A. Wintner *Zur theorie beschränkten Bilinearformen*, Math. Z., **30**(1929), 228–282.

D.Xia *Spectral Theory of Hyponormal Operators*, Birkhäuser-Verlag, Boston,

1983.

T.Yamazaki

[1] *Simplified proof Tanahashi's result on the best possibility of generalized Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 473–477.

[2] *An extension of Specht's theorem via Kantorovich inequality and related results*, Math. Inequal. Appl., **3**(2000), 89–96.

[3] *Further characterizations of chaotic order via Specht's ratio*, Math. Inequal. Appl., **3**(2000), 259–268.

[4] *On powers of class $A(k)$ operators including p-hyponormal and log-hyponormal operators*, Math. Inequal. Appl., **3**(2000), 97–104.

T.Yamazaki and M.Yanagida *Characterizations of chaotic order associated with Kantorovich inequality*, Scientiae Mathematicae, **2**(1999), 37–50.

M.Yanagida

[1] *Some applications of Tanahashi's result on the best possibility of Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 297–305.

[2] *Powers of class $wA(s,t)$ operators associated with generalized Aluthge transformation*, to appear in Math. Inequal. Appl.

T.Yoshino

[1] *Introduction to operator theory*, Longman Scientific and Technical, 1993.

[2] *The p-hyponormality of the Aluthge transform*, Interdiscip. Inform. Sci., **3**(1997), 91–93.

K.Yosida *Functional Analysis*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1968.

記　号

H : Hilbert space over complex scalar $\mathbb{C}$ (複素数 $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間)　5

(x, y) : the inner product of x and y (x と y の内積)　1

$\|x\|$: the norm of a vector x (x のノルム)　1

$\|T\|$: the operator norm of T (T の作用素ノルム)　31

T^* : the adjoint operator of an operator T (T の共役作用素)　35

$x \oplus y$: the direct sum of x and y (x と y の直和)　15

$M \oplus M^\perp$: the direct sum of M and $M^\perp$ (M と $M^\perp$ の直和)　15

$T \Longrightarrow T_0$ (u) : T is uniformly operator convergent to T_0
(T は T_0 に一様作用素収束する)　46

$T \Longrightarrow T_0$ (s) : T is strongly operator convergent to T_0
(T は T_0 に強作用素収束する)　46

$T \Longrightarrow T_0$ (w) : T is weakly operator convergent to T_0
(T は T_0 に弱作用素収束する)　46

$T^{\frac{1}{2}}$: the square root of a positive operator T (正値作用素 T の平方根)　48

$|T|$: the absolute value $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ of an operator T
(作用素 T の絶対値 $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$)　60

$A \geq 0$: $(Ax, x) \geq 0$ for all $x \in H$
(任意の $x \in H$ に対して $(Ax, x) \geq 0$ である)　39

$A \gg B$: chaotic order $\log A \geq \log B$　140

$N(T)$: the kernel of an operator T (T の核)　56

$R(T)$: the range of an operator T (T の値域)　56

$W(T)$: the numerical range of an operator T (T の数域)　89, 93

$\overline{W(T)}$: the closure of the numerical range of an operator T
(T の数域の閉包)　89

$w(T)$: the numerical radius of an operator T (T の数域半径)　89, 97

$\sigma(T)$: the spectrum of an operator T (T のスペクトル)　82

$\mathrm{co}(X)$: the convex hull of set X (集合 X の凸包)　99

省略形

索　引

著者紹介

古田孝之（ふるた たかゆき）

現在　東京理科大学教授
弘前大学名誉教授
（理学博士）

2001年4月5日　初版発行

線形作用素への誘い

著者　古田孝之
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電話(03)3262-5256(代表)・振替00140-7-44725

D.T.P. アベリー・平文社印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-00298-4 C3041